

Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті

ӘОЖ 530.182.1

Қолжазба құқығында

ҚҰРМАНБАЙ ДАМИР МҰРАТБЕКҰЛЫ

Инверсияланған минималды беттердің солитонды деформациясы

6D060100- Математика

Философия докторы (PhD)
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертациясы

Отандық ғылыми кеңесшісі:
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық университеті,
Математика және компьютерлік модельдеу кафедрасының доценті,
ф.-м.ғ.к., қауымдастырылған проф. Қ. Есмаханова

Шетелдік ғылыми кеңесшісі:
Сібір Федералды университеті, Красноярск қ., РФ
ф.-м.ғ.д., профессор С.П.Царев

Қазақстан Республикасы
Алматы, 2022

МАЗМҰНЫ

НОРМАТИВТІ СІЛТЕМЕЛЕР.....	3
БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР.....	4
КІРІСПЕ.....	5
1 МИНИМАЛДЫ БЕТТЕР.....	10
1.1 Үшөлшемді кеңістіктегі беттер.....	10
1.2 Беттердің геометриясы.....	12
1.3 Беттердің сызықты алгебрасы.....	20
1.4 Нормал қисықтық.....	23
1.5 Гаусстық және орташа қисықтықтар.....	27
1.6 Минималды беттердің формулалары.....	32
1.7 Минималды беттердің инверсиясы.....	38
2 ИНВЕРСИЯЛАНҒАН МИНИМАЛДЫ БЕТТЕР ҮШІН ДЕФОРМАЦИЯЛАР.....	42
2.1 Модификацияланған Веселов - Новиков теңдеулері.....	42
2.2 Мутар түрлендіруінің геометриясы.....	45
2.3 Мутар түрлендіруінің сызықты алгебрасы.....	50
2.4 Инверсияланған минималды беттер үшін солитонды деформациялар.....	51
3 СОЛИТОНДЫ ДЕФОРМАЦИЯЛАР ҚОЛДАНЫЛУЛАРЫ.....	68
3.1 Инверсияланған жоғарғы ретті Эннепер беттері үшін солитонды деформациялар қолданылулары.....	69
3.2 Инверсияланған жоғарғы ретті Эннепер беттері үшін солитонды деформацияның ойындар теориясында қолданылуы.....	77
ҚОРЫТЫНДЫ.....	80
ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ.....	81

НОРМАТИВТІ СІЛТЕМЕЛЕР

Диссертациялық жұмыста келесі стандарттарға сілтемелер қолданылды:
МЕМС 7.32-2001 (2006 ж. өзгерістер). Ғылыми зерттеу жұмысы туралы есеп.
Рәсімдеу ережелері мен құрылымы;
МЕМС 7.1-2003. Библиографиялық жазба. Библиографиялық сипаттама.
Құрастырудың жалпы талаптары мен ережелері;
ҚР МЖМБС 5.04.034-2011: Қазақстан Республикасының жалпыға міндетті
білім беру мемлекеттік стандарты. Жоғары оқу орнынан кейінгі білім беру.
Докторантура. Негізгі ережелер.

БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР

- \mathcal{D} - Дирак операторы;
 x^1, x^2, x^3 - қандайда бейнелеудің компонент функциялары (координаталар);
 S_p - форма операторы (Вейнгартен бейнелеуі);
 G - Гаусс бейнелеуі;
 K, H - гаусстық және орташа қисықтықтар;
 Ψ - Дирак теңдеуінің матрица мәнді шешімі;
 $\tilde{\omega}(\Phi, \Psi)$ - матрица түріндегі 1-форма;
 \mathbb{H} - төртөлшемді кеңістігі (жорамал кватерниондар);
 $su(2)$ - Ли алгебрасы;
мВН - модификацияланған Веселов-Новиков теңдеуі;
мКдФ - модификацияланған Кортевег-де Фриз теңдеуі;
 \tilde{U}, \tilde{V} - мВН теңдеуінің тривиалды емес шешімдері;
 $V_{\bar{z}}$ - $V(z, \bar{z}, t)$ функциясының \bar{z} бойынша дербес туындысы;
 $\tilde{\psi}$ - инверсияланған минималды беттер үшін вектор-функциясы;
 S^{-1} - S минималды бетінің инверсиясы;
 $\mathbb{N} - \{3p\}$ - натурал сандар жиынынан үшке еселі сандар жиыны алынған жиын.

КІРІСПЕ

Зерттеу тақырыбының өзектілігі.

Солитондар теориясы Гарднер, Грин, Крускал және Миурдің (GGKM) [1] Кортевег-де Фриз теңдеулері үшін шағылудың кері түрлендіруіне байланысты жаңалықтарының арқасында дамыған. Олардың осындай нәтижелерге жетуіне бұдан бұрын бірөлшемді торлар үшін Ферма-Паста-Улам проблемасын зерттеген Крускал және Забускидің [2] солитондарды ашқан жаңалықтары түрткі болды. Осылай солитондар теориясының заманауи дамуы басталып кетті. Бірақ осы жаңалықтың ең алғашқы тарихи нүктесі – 131 жыл бұрын басталған.

1834 жылы теңіз инженері Джон Скотт Рассел Эдинбургдің маңайында Юнион каналына бағытталаып ат үстінде кетіп бара жатты. Сол сәтте не көргенін [3] жұмысында келесідей баяндап береді:

«Мен екі аттың жіңішке каналмен сүйреген қайықтың қозғалысын байқадым, кенеттен қайық тоқтаған кезде – қайықты қозғалысқа келтірген каналдағы су қатты тербеліс күйінде қайықтың бас тұсына жиналды, содан кейін ол қайықты артта қалдырып, жоғарғы жылдамдықпен, үлкен ажыратылған дөң, дөңгеленген, тегіс және ашық бейнеде судың формасында каналдың бойымен өз бағытында формасы не жылдамдығын азайтастан айқын түрде алға жылжи берді. Мен ат үстінде, оның алғашқы ұзындығы 9 метрдей формасын сақтап, 30–45 см биіктікте, мөлшермен 14 км/сағ жылдамдықпен сырғығанын артынан жүріп, қуып жеттім. Содан оның биіктігі біртіндеп азая берді, 2-3 км соңынан жүргенімде каналдың ішінде жоғалтып алдым. Осылай 1834 жылы бірінші рет ерекше және әдемі құбылысты көрдім және оны мен жылжыту (трансляция) толқыны деп атадым» .

Модификацияланған Веселов-Новиков теңдеуін (мВН) 1987 жылы Богданов Л.В. [4] жұмысында енгізген. Ал солитонды мВН деформациялар [5], [6] жұмыстарында енгізілген. Модификацияланған Веселов-Новиков теңдеуін шығару алгоритмі [7] жұмысында келтірілген және Мутар түрлендіруі деп аталатын осы алгоритмнің геометриялық мағынасы [8] жұмысында алынған.

Аталған түрлендіру келесі Дирак теңдеуі [9]:

$$\mathcal{D}\psi = 0,$$

шешімімен және үш нақты тұрақтылармен беріледі, мұндағы $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} U & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{\partial \bar{z}} & V \end{pmatrix}$ –

U, V потенциалдарымен белгілі Дирак операторы. Ал Дирак теңдеуінің кез келген шешімі Вейерштрасс формулалары арқылы жылжытуға дейін дәлдікпен берілген, үшөлшемді евклидтік кеңістікте бетті анықтайды. Осы бетте конформды параметр беріледі және Дирак операторының U потенциалы сол бетті сипаттайтын потенциал болып табылады. Осы бетке центрі координата басында болатын инверсияны қолданып, тура сол конформды параметрі берілген және жаңа потенциал сипаттайтын жаңа бетті аламыз. Яғни, диссертациялық

жұмыста минималды бетті инверсиялап, нәтижесінде инверсияланған минималды бет үшін солитонды деформацияны аламыз. Солитонды деформация [10] осы бетті сипаттайтын Мутар түрлендіруі көмегімен табылған потенциал арқылы анықталады.

2014 жылы бастапқы Эннепер бетін қатаң жылжыту көмегімен мВН теңдеуінің бұзылушы шешімдері [10, б. 9] алынған болатын. Ары қарай екінші ретті Эннепер беті үшін нәтижелер [11], [12] жұмыстарында алынған. Бірақ кез келген облыста жоғарғы ретті Эннепер беттері үшін солитонды деформация әлі де белгісіз. Дегенмен, [14], [15] жұмысында бастапқы жоғарғы ретті Эннепер беттерін параллель тегіс көшіру арқылы қандайда шектелген облыста солитонды деформация табылған. Сонымен қатар, диссертациялық жұмыста екінші координаталық осьтің бойымен тегіс жылжыту арқылы инверсияланған катеноид, геликоид үшін солитонды деформациялар табылды.

Математикалық физика және дифференциалдық геометрия, спектралды теория және комплекс анализде интегралданатын жүйелерді зерттеу кезінде Мутар түрлендірулері ауқымды талданған, мысал ретінде [16], [17], [18], [19] жұмыстарын атап өтуге болады. Сонымен қоса, [20], [21], [22] жаңа зерттеулерде солитондар теориясы үшін қандайда практикалық қолданулары алынған. Сондықтан қазіргі кезде солитондар теориясында пайда болған есептер, тіпті геометриялық мағынасы бар (жоғарыда көрсетілген) есептер өзекті мәселе болып табылады.

Диссертациялық жұмыстың мақсаты – модификацияланған Веселов-Новиков теңдеуінің шешімдерін тауып, үшөлшемді кеңістікте инверсияланған минималды беттер үшін солитонды деформацияны құрастыру.

Осы мақсатқа сәйкес зерттеу міндеттері:

- модификацияланған Веселов-Новиков теңдеулеріне Мутар түрлендіруін қолданып, мВН теңдеуінің нақты шешімдерін табу;
- бастапқы минималды беттерді (катеноид, геликоид, жоғарғы ретті Эннепер беттерін) қандайда координаталық осьтің (түзудің) бойымен тегіс жылжыту-бекіту және қатаң жылжыту-бекіту деформациялары арқылы мВН теңдеулерінің регулярлы және бұзылушы шешімдерін құрастыру;
- инверсияланған минималды беттерді сипаттайтын регулярлы және бұзылушы потенциалдардың кескіндерін салыстыру;
- мВН теңдеулерінің аналитикалық шешімдеріне талдау жасап, инверсияланған минималды беттер үшін солитонды деформацияны дифференциалдық геометрия және солитондар теориясында белгілі әдістермен байланыстыру;
- инверсияланған минималды беттер үшін солитонды деформацияның қолданылуларын көрсету.

Зерттеу нысаны - бастапқы минималды беттер.

Зерттеу пәні - дифференциалдық геометрия, солитондар теориясы.

Зерттеу әдістері. Диссертациялық жұмыста модификацияланған Веселов-Новиков теңдеуін шығару үшін Мутар түрлендіруі қолданылады. мВН теңдеулерінің шешімдері көлемді болғандықтан, аталған теңдеу шешімдері Maple бағдарламалық пакет арқылы оңай тексеріледі. Сонымен қатар, бұл

шешімдер [5, б. 11], [6, б. 13] жұмыстарында енгізілген солитонды мВН деформацияларды құрастыруға мүмкіндік береді. Инверсияланған минималды беттер үшін солитонды деформацияны зерттеу үшін дифференциалдық геометриядан белгілі әдістер ұсынылады.

Ғылыми жаңалығы. Диссертациялық жұмыста келесі минималды беттердің инверсиясы арқылы солитонды мВН деформациялар құрастырылған: катеноид, геликоид және жоғарғы ретті Эннепер беттері.

Диссертациялық жұмыста келесі нәтижелер алынған:

- мВН теңдеуінің шешімдері жоғарғы ретті Эннепер беттері мысалдарын келтіру арқылы табылған;
- модификацияланған Кортевег-де-Фриз (мКдФ) теңдеуінің шешімі катеноид мысалын келтіру арқылы табылған;
- мВН теңдеуінің шешімдері геликоид мысалын келтіру арқылы табылған;
- инверсияланған минималды беттер үшін солитонды деформация құрастырылған.

Зерттеудің теориялық және практикалық маңыздылығы. Диссертациялық жұмыс теориялық және практикалық есептерден тұрады. Алынған нәтижелерді заманауи геометриялық құрылымдарда және солитондар теориясында қолдануға да болады. Диссертациялық жұмыста келтірілген зерттеу әдістері қосымша теориялық физикада әртүрлі есептерді шығару барысында қолданылады.

Қорғауға ұсынылатын ғылыми ережелер:

- инверсияланған жоғарғы ретті Эннепер беттері үшін солитонды деформацияның құрастырылуы;
- инверсияланған катеноид үшін солитонды деформация құрастыру арқылы модификацияланған Кортевег-де-Фриз (мКдФ) теңдеуінің шешімінің табылуы;
- инверсияланған жоғарғы ретті Эннепер беттерін сипаттайтын регулярлы және бұзылушы потенциалдардың кескіндерін талдап, осы беттер үшін солитонды деформацияның қолданылуларын көрсету.

Жұмыстың апробациясы. Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері келесі халықаралық ғылыми конференцияларда баяндалды және талқыланды:

- ҚР ҰҒА академигі Н.К.Блиевдің 80-жылдығына арналған «Функциялар теориясы, информатика, дифференциалдық теңдеулер және олардың қолданылулары» Халықаралық ғылыми конференциясында 15-16 қазан 2015 ж., Алматы, Қазақстан [23];
- ҚР ҰҒА академигі К.К.Қасымовтың 80-жылдығына арналған «Математика және информатиканың өзекті мәселелері» Халықаралық ғылыми конференциясында 21-23 желтоқсан 2015 ж., Алматы, Қазақстан [15];
- Third International Conference on Analysis and Applied Mathematics, ICAAM 2016, September 7-10, Almaty, Kazakhstan [24, б. 79];
- «Көпбейнелер геометриясы» Халықаралық ғылыми конференциясында, 27-30 маусым 2016 ж., Улан Удэ қ., Бурятия Республикасы, Ресей [12];

- «Көпбейнелер геометриясы және олардың қолданылулары» VI Халықаралық ғылыми конференциясында, 8-10 шілде 2020 ж., Улан-Удэ қ. – Байкал к., Ресей [25, б. 38]; және

- ҚР ҰҒА академигі Т.Ш. Кальменов, ҚР ҰҒА корреспондент-мүшесі., ф.-м. ғ. д., профессор М. А. Садыбеков, ф.-м. ғ. д., профессор Б. Е. Кангужин жетекшілігімен, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ механика-математика факультетінің «Дифференциалдық операторлар және олардың қолданылулары» қалалық ғылыми-зерттеу семинарында талқыланып, оң баға берілді.

Жарияланымдар.

Автордың диссертация тақырыбы бойынша нәтижелері келесі 9 жұмыста жарияланды: 3 мақала – ҚР БҒМ Білім және ғылым саласындағы бақылау комитеті ұсынған тізімдегі журналда; 1 мақала – нөлдік емес импакт-факторы бар Scopus дерекқорына кіретін журналда; 1 мақала - РИНЦ базасымен индекстелген рецензияланған VI халықаралық ғылыми конференциясы материалдары; 4 тезис - халықаралық ғылыми конференциялар материалдары.

Диссертация құрылымы және көлемі.

Диссертациялық жұмыс негізгі беттен, мазмұннан, белгілеулер мен қысқартулар тізімінен, кіріспеден, үш тарау және оның бөліктерінен, қорытындыдан және әдебиеттер тізімінен тұрады. Қолданылған әдебиеттер тізімі – 51. Диссертация көлемі – 84 бет.

Жұмыстың негізгі мазмұны. Диссертациялық жұмыстың әрбір тарауы жеке бөліктерден тұрады.

Кіріспеде зерттеу мәселесінің қазіргі жағдайы талданады және әдебиеттерге шолу жасалады, диссертациялық жұмыстың өзектілігі негізделген, жұмыстың мақсаты қойылды, зерттеу міндеттері, нысаны, пәні айқындалды және зерттеу нәтижелерінде диссертациялық жұмыстың ғылыми жаңалығы, теориялық және практикалық маңыздылығы көрсетілді.

Бірінші тарауда дифференциалдық геометрияның негізгі ұғымдары қазіргі өзекті тақырыптарға сәйкес [26], [27], [28], [29], [30] жұмыстары арқылы енгізілген және [7, б. 6], [10, б. 7] жұмыстарында белгілі ғылыми нәтижелер қолданылған.

Екінші тарауда модификацияланған Веселов-Новиков теңдеуін шығару үшін белгілі Мутар түрлендіруі (Darboux transformation) келтірілген. Инверсияланған минималды беттер үшін солитонды деформацияларды сипаттау үшін мВН теңдеулерінің тривиалды емес шешімдері табылған. Атап айтқанда, [10, б. 13] жұмысында есеп ретінде қойылған инверсияланған жоғарғы ретті Эннепер беттері үшін солитонды деформациялары табылған және инверсияланған катеноид, инверсияланған геликоид үшін солитонды деформациялар зерттелген. Екінші тараудың нәтижелері [11, б. 84], [14, б. 1], [23], [34], [35] жұмыстарында жарияланған.

Үшінші тарауда модификацияланған Веселов-Новиков теңдеулерінің шешімдері Maple бағдарламалық пакет көмегімен тексерілді және жоғарғы ретті Эннепер беттері үшін солитонды деформациялардың кескіндері алынды және осы беттерді сипаттайтын регулярлы және бұзылушы потенциалдардың

қозғалыс динамикасы салыстырылды. Инверсияланған жоғарғы ретті Эннепер беттері үшін солитонды деформацияның қолданылулары көрсетілді. Үшінші тараудың нәтижелері [11, б. 84], [14, б. 4-5], [23] жұмыстарында жарияланған.

Қорытынды ретінде, жұмыста алынған диссертациялық зерттеудің негізгі нәтижелері мен тұжырымдары келтірілген.

1 МИНИМАЛДЫ БЕТТЕР

1.1 Үшөлшемді кеңістіктегі беттер

D – жиыны R^2 жазықтығында ашық жиын болсын. D ашық жиынын ашық дөңгелек немесе ашық тіктөртбұрыш деп есептейік.

$$r: D \rightarrow R^3 \\ (u, v) \rightarrow (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v))$$

- деп D облысынан үшөлшемді кеңістікке бейнелеуін белгілейік.

$x^i(u, v)$ дегеніміз r бейнелеуінің компонент функциялары болады. r бейнесінен уақытқа байланысты дербес туындылар алу арқылы есептеулер жүргізіледі.

$v = v_0$ бекітіп, u өзгертейік, сонда $r(u, v_0)$ бір параметрге тәуелді, яғни [13] белгілі қисық шығады. Бұл қисық *параметрлік u – қисығы* деп аталады. Сәйкесінше, $u = u_0$ бекіткенде $r(u_0, v)$ *параметрлік v – қисығы* деп аталады. Осы аталған екі қисықтар $r(u_0, v_0)$ нүктесі арқылы R^3 кеңістігінде берілген. Жанама векторлар r бейнесінің компонент функцияларынан u және v айнымалысына қатысты сәйкес *параметрлік u және параметрлік v – қисықтары* үшін дифференциалдау [47] арқылы беріледі, яғни

$$r_u = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u}, \frac{\partial x^2}{\partial u}, \frac{\partial x^3}{\partial u} \right) \quad \text{және} \quad r_v = \left(\frac{\partial x^1}{\partial v}, \frac{\partial x^2}{\partial v}, \frac{\partial x^3}{\partial v} \right)$$

- деп белгіленеді.

Егер D облысындағы барлық нүктелері үшін $r_u \times r_v \neq 0$ болса, онда $D \subseteq R^2$ ашық жиынының $r: D \rightarrow R^3$ бейнелеуі *регулярлы* деп аталады.

Параметризация (немесе координата бүркеуі) деп - $D \subseteq R^2$ ашық жиынын R^3 -ке көшіретін $r: D \rightarrow R^3$ өзара бірмәнді регуляр бейнелеуі аталады.

R^3 -тегі *бет* [13, б. 134], [47, б. 217] деп – әрбір нүктесі кез келген маңайымен $r: D \rightarrow M \subseteq R^3$ қандайда координата бүркеуінің бейнесінде орналасқан $M \subseteq R^3$ ішжиыны аталады.

Егер $f \circ r: D \rightarrow R$ композициясы (M -дегі әрбір r бүркеуі үшін) тегіс болса, онда M қандайда бетте $f: M \rightarrow R$ функциясы *дифференциалданатын (не тегіс) функция* деп аталады.

$\alpha: I \rightarrow M$ деп - ($I = [a, b] \subseteq R$ нақты сандар интервалын M бетіне бейнелейтін) сол беттегі қисықты белгілейміз.

Кез келген $p, q \in M$ нүктелері үшін $\alpha(0) = p, \alpha(1) = q$ шарттары орындалатын $\alpha: [0, 1] \rightarrow M$ қисығы табылатын болса, M беті *жол бойымен байланысты* деп аталады.

Егер $r^{-1} \circ \alpha: I \cap \alpha^{-1}(r(D)) \rightarrow R^2$ тегіс болса (M бетіндегі барлық r бүркеуі үшін), онда қисық *дифференциалданатын (не тегіс) қисық* деп аталады.

[26, б. 69], [47, б. 222] жұмыстарында белгілі келесі лемма беттердің тегістігі неліктен маңызды екендігін көрсетеді. Атап айтқанда, беттердегі қисықтарды түсіну үшін R^2 жазықтығының ашық облыстарында параметрлік қисықтарын қарастыру жеткілікті болады.

Негізгі лемма [26, б. 69].

M – беті берілген болсын. Егер R^3 -тегі $\alpha: I \rightarrow r(D) \subseteq M$ қисығы M бетінде r бүркеуінің бейнесінде орналасқан болса, онда жалғыз $u(t), v(t): I \rightarrow R$ тегіс функциялары үшін

$$\alpha(t) = r(u(t), v(t))$$

теңдігі орындалады.

Дәлелі. α - тегіс қисық болғандықтан, анықтама бойынша $r^{-1} \circ \alpha: I \rightarrow D$ композициясы да тегіс болады. Сонымен қатар, $D \subseteq R^2$ үшін $r^{-1} \circ \alpha(t) = (u(t), v(t))$, яғни

$$\alpha(t) = r(r^{-1} \circ \alpha(t)) = r(u(t), v(t))$$

екендігі шығады.

$u(t), v(t)$ функцияларының жалғыздығын көрсету үшін басқа \bar{u} және \bar{v} функциялары үшін $\alpha = r(\bar{u}(t), \bar{v}(t))$ деп ұйғарайық. Бұл жерде \bar{u}, \bar{v} функциялары I интервалында қайта параметризация арқылы анықталғанын ескертейік. Сондықтан

$$(u(t), v(t)) = r^{-1} \circ \alpha(t) = r^{-1} \circ r(\bar{u}(t), \bar{v}(t)) = (\bar{u}(t), \bar{v}(t)).$$

Егер $M \subset R^3$ беті тұйық және шенелген болса, онда бет *компакт* деп аталады.

Егер бет R^3 -те жеткілікті үлкен сферамен шектелсе, M бетін *шенелген бет* дейміз.

Ал R^3 -те кез келген жинақты тізбектің $x_i \rightarrow \bar{x}$ шегі $\bar{x} \in M$ ($x_i \in M$) болса, $M \subset R^3$ ішжиынын *тұйық бет* дейміз.

Тұжырым [26, б. 70]. Келесі екі шарттар орындалады:

- Егер $F: M \rightarrow N$ беттердің бейнелеуі үшін M – компакт болса, онда $F(M)$ жиыны N бетінде компакт болады.

- Егер $f: M \rightarrow R$ тегіс функция және M – компакт болса, онда f функциясы M бетінің қандайда нүктелерінде максимум және минимум мәндеріне жетеді.

1.2 Беттердің геометриясы

Енді бет туралы ұғымды анықтағаннан кейін оның геометриясын қалай сипаттауымызға болады? Расында да, математиктің бұл сұраққа жауап беретін ең маңызды әдісі - барлық жаратылыстану ғылымдарында кездесетін сызықты жуықтау әдісі болып табылады. Сызықты емес немесе иілген объектілерді тікелей қарастыру күрделі болғандықтан, біз қандайда сызықты элементтермен; яғни, сызық, жазықтық, евклидтік кеңістіктермен жуықтаймыз. Одан кейін сызықты объектіні қарастыру негізінде бастапқы иілген объект туралы қорытынды жасаймыз. Әрине, осындай әдіс дифференциалдық геометрияда қисыққа сызықты Френе үшжақтарын [13, б. 66], [26, б. 19], [27, б. 35], [28, б. 5], [47, б. 206] бекіту арқылы қолданылады. Осындай әдіс дифференциалдық теңдеулерден бастап алгебралық топология пәндеріне дейін тиімді болып табылады.

Ендігі сұрақ бетті аппроксимациялау үшін сызықты кеңістіктің қандай түрін қолдануға болады? Бір айнымалылы есептеулерде қисықты нүктенің маңайында жуықтау үшін жанама қолданылады, дәл сол сияқты M бетін $p \in M$ нүктесінің маңайында жуықтау үшін $T_p(M)$ жанама жазықтығын [26, б. 62], [48, б. 38] қолдануымызға болады. Жазықтық векторлардан құралады, сондықтан $T_p(M)$ жазықтығы үшін қарастырылатын векторлар – M бетіндегі қисықтың жылдамдық векторлары болуы тиіс.

Егер $\mathbf{v}_p \in T_p(M)$ векторы M бетіндегі қандайда қисықтың жылдамдық векторы болса, онда \mathbf{v}_p векторы M бетінің p нүктесіндегі жанамасы деп аталады. Яғни, қандайда $\alpha: I \rightarrow M$ үшін $\alpha(0) = p$ $\alpha'(0) = \mathbf{v}_p$ орындалады.

M бетінің p нүктесіндегі жанама жазықтығы деп - M бетіне p нүктесінде жүргізілген \mathbf{v} жанама векторлар жиыны арқылы анықталған $T_p(M)$ атайды.

$p = r(u_0, v_0)$ нүктесінен өтетін параметрлік u және v қисықтарының жылдамдық векторлары r_u және r_v екенін білеміз. Келесі нәтиже кез келген жанама вектор осы r_u және r_v жалғыз сызықты комбинация арқылы өрнектелетінін білдіреді. Яғни, $T_p(M)$ векторлық кеңістікте $\{r_u, r_v\}$ базис [26, б. 63] құрайды.

Лемма 1 [26, б. 77]. $\mathbf{v} \in T_p(M)$ сонда және тек сонда ғана егер $\mathbf{v} = \lambda_1 r_u + \lambda_2 r_v$, мұндағы r_u, r_v векторлары (u_0, v_0) нүктесінде анықталған.

Дәлелі. α қисығы $\alpha(0) = p$ және $\alpha'(0) = \mathbf{v}$ болсын деп ұйғарайық. 1.1, негізгі лемма бойынша, $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$ екені белгілі, енді туындының ережесі бойынша

$$\alpha' = r_u \left(\frac{du}{dt} \right) + r_v \left(\frac{dv}{dt} \right)$$

аламыз. $\alpha(0) = p = r(u(0), v(0))$, яғни, $u(0) = u_0, v(0) = v_0$ (себебі, r өзара бірмәнді бейнелеу) $\mathbf{v} = \alpha'(0) = r_u(u_0, v_0) \frac{du}{dt}(0) + r_v(u_0, v_0) \frac{dv}{dt}(0)$

Соңғы теңдіктен $\lambda_1 = \frac{du}{dt}(0), \lambda_2 = \frac{dv}{dt}(0)$ шығады.

$\mathbf{v} = \lambda_1 r_u + \lambda_2 r_v$ болсын. r_u, r_v векторлары (u_0, v_0) нүктесінде анықталған. $\alpha(0) = p$ және $\alpha'(0) = \mathbf{v}$ шарты орындалатын M бетіндегі қисықты табуымыз керек, ол үшін r бүркеуін қолданып,

$$\alpha(t) = r(u_0 + t\lambda_1, v_0 + t\lambda_2)$$

түрінде анықтаймыз.

$$\alpha(0) = r(u_0, v_0) = p \text{ және}$$

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= r_u(u_0 + t\lambda_1, v_0 + t\lambda_2) \frac{d(u_0 + t\lambda_1)}{dt} + r_v(u_0 + t\lambda_1, v_0 + t\lambda_2) \frac{d(v_0 + t\lambda_2)}{dt} = \\ &= r_u(u_0 + t\lambda_1, v_0 + t\lambda_2)\lambda_1 + r_v(u_0 + t\lambda_1, v_0 + t\lambda_2)\lambda_2, \end{aligned}$$

$$\text{Сонымен, } \alpha'(0) = r_u\lambda_1 + r_v\lambda_2.$$

■

$T_p(M)$ жанама жазықтығында $\{r_u, r_v\}$ базис құрайтындықтан, осы r_u және r_v екі векторларына перпендикуляр (яғни, кез келген $\mathbf{v} = \lambda_1 r_u + \lambda_2 r_v$ векторына да перпендикуляр) болатын векторды табуымыз керек. Ондай вектор $r_u \times r_v$ векторлық көбейтіндімен беріледі.

Егер беттің $r(u_0, v_0) = p$ шартымен r бүркеуі [26, б. 78] берілсе, онда $T_p(M)$ -нің \mathcal{N} нормалы

$$\mathcal{N} = r_u(u_0, v_0) \times r_v(u_0, v_0)$$

арқылы беріледі.

Беттердің геометриясын қарастырудағы мақсат

- егер бетке жүргізілген нормал бағытының қалай өзгертінін білетін болсақ (қисықтар үшін жанама вектордың көмегімен анықталған бағыт бойынша қозғалысы сияқты), онда беттің өзі сол бағытта қалай иілетінін білуімізге болады.

r регуляр бүркеуі үшін

$$U = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$$

бірлік нормалы әрбір нүктесінде анықталған. Яғни, r_u және r_v ретін ауыстырсақ, бүркеудің әрбір нүктесінде $-U$ болады. *Бағытталған бет* дегеніміз – беттің әрбір нүктесінде анықталған бірлік нормалдардың тегіс векторлық өрісінің болуы.

Диссертациялық жұмыста бағытталмаған Мебиус, Геннеберг сияқты беттер қарастырылмайды.

Беттің геометриясын орнатуда бірлік нормалдың өзгерісін қарастыруды жалғастыра берейік. $g(x, y, z)$ функция және $\alpha(t) = (\alpha^1(t), \alpha^2(t), \alpha^3(t))$ қисық болсын. Онда туындының ережесі бойынша,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(g(\alpha(t))) &= \frac{\partial g}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \\ &= \frac{\partial g}{\partial x} \frac{d\alpha^1}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{d\alpha^2}{dt} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{d\alpha^3}{dt} = \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{d\alpha^1}{dt}, \frac{d\alpha^2}{dt}, \frac{d\alpha^3}{dt} \right) = \\ &= \nabla g(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \end{aligned}$$

мұндағы $\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right)$. $\mathbf{v} \in T_p(M)$ және $M \subseteq R^3$ бетінде g шектелген деп есептейік.

Енді M бетіндегі g функциясының \mathbf{v} -бағытында өзгерісін қарастыруға болады. Яғни, M бетіндегі \mathbf{v} -бағытында дегеніміз - әрбір p нүктесінде $\alpha' = \mathbf{v}$ болатын α қисығының бағытын білдіреді.

g функциясының \mathbf{v} – бағыты бойынша бағыттас туынды [26, б. 81] дегеніміз –

$$\mathbf{v}[g](p) = \left. \frac{d}{dt}(g(\alpha(t))) \right|_{t=0} = \nabla g(p) \cdot \mathbf{v}$$

мұндағы $\alpha(0) = p \in M$ және $\alpha'(0) = \mathbf{v}$. Бұл жерде соңғы теңдікте бағыттас туынды p нүктесінде \mathbf{v} жылдамдық векторынан тәуелсіз екенін көреміз. Ал \mathbf{v} жылдамдық векторы $g: M \rightarrow R$ функциясына әсер етеді, сондықтан $\mathbf{v}[g]$ скаляры арқылы өрнектейді. Бұл $\mathbf{v}[g]$ скаляры деп бағыттас туындыны белгілейді. Ескерте кететін жағдай, бірнеше айнымалылы есептеулерде бағыт бойынша жәй туындыға да дәл осындай анықтама беріледі. Бірақ g функциясы M бетінде шектелмей,

R^3 -те \mathbf{v} бағыт векторы әртүрлі болуы мүмкін.

Көп жағдайда, \mathbf{v} деп M бетіндегі векторлық өрісті белгілейді. Бұл векторлық өріс $p \in M$ қандайда нүктелерде тандауын тегіс өзгерте алатын жанама векторлардан тұрады. Яғни, M бетіндегі $\mathbf{v}[g]$ жаңа функциясы $\mathbf{v}[g](p) = \mathbf{v}_p[g]$ арқылы анықталады.

Егер кез келген $\alpha: I \rightarrow M$ үшін $t \rightarrow \mathbf{v}(\alpha(t))$ дифференциалданатын болса, онда \mathbf{v} векторлық өрісі M бетінде *тегіс өзгереді* дейміз.

Егер M бетінде f функциясы берілсе, r бүркеуі арқылы композиция $f(r(u, v)) = f \circ r$ құрастыруға болады және f функциясы u және v айнымалыларына тәуелді, сондықтан

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial (f \circ r)}{\partial u}$$

дәл солай v айнымалысына да қатысты туындысын жазуға болады.

$$\frac{d}{du}(r(u, v_0)) = r_u$$

болғандықтан,

$$r_u[f] = \frac{d}{du}f(r(u, v_0))\Big|_{u=u_0} = \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{u=u_0},$$

яғни, параметрлік u жылдамдық векторы функцияның u дербес туындысын беретін функцияға қолданылады (бүркеу арқылы композиция).

Лейбниц ережесі (немесе көбейту ережесі) [26, б. 81]:

$\mathbf{v} \in T_p(M)$ жанама (векторы) үшін

$$\mathbf{v}[fg] = \mathbf{v}[f]g(p) + f(p)\mathbf{v}[g]$$

теңдігі орындалады.

Маңызды ескерту [26, б. 82].

Есептеулерде жалпы бағытас туындыны *бірлік вектор* арқылы анықтайды. Сондықтан беттерге *бірлік нормалдарды* қарастырамыз, яғни,

$$U = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$$

болсын. Енді берілген бағыт бойынша U -дың өзгерісі – беттің формасы арқылы өлшенеді.

M бетіне нормал вектор сол бетте әртүрлі p нүктесін қабылдайды, әрі сол нүктелерге $U(p) \in R^3$ векторын сәйкес қояды. R^3 -тегі вектор $U(p) = (u^1(p), u^2(p), u^3(p))$ және

$$U = (u^1, u^2, u^3)$$

арқылы жазылады немесе R^3 -тегі $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ базисінде

$$U = u^1 e_1 + u^2 e_2 + u^3 e_3 = \sum_{i=1}^3 u^i e_i$$

мұндағы u^1, u^2, u^3 функциялары M - нен R -ге бейнелеу. Әрбір $p \in M$ нүктелеріне U арқылы векторлар сәйкес қойылғандықтан, M бетінде U – векторлық өріс болып табылады.

U бірлік нормалдың $\mathbf{v} \in T_p(M)$ бағытында өзгерісін қалай сипаттауға болады? Ол үшін \mathbf{v} бағытында u^1, u^2, u^3 функцияларының өзгерістеріне тоқталайық. Яғни, \mathbf{v} бағытында u^i функцияларының бағыттас туындыларын қарастырамыз. Әрине, бізді \mathbf{v} бағытында U -дың бастапқы өзгерісінің өлшемі қызықтырады, себебі, \mathbf{v} векторы p нүктесінде орналасқан және 0 -дегі туындыларды (яғни, $\alpha(0) = p$) есептейміз.

\mathbf{v} бағытында U -дың бастапқы өзгерісінің өлшемі *ковариантты туынды* ([28, б. 28], [29, б. 114]) деп аталады.

Осы ковариантты туынды U -дың әрбір координаталық функциясына қарапайым бағыттас туынды қолданумен бірдей болады.

Сондықтан ковариантты туындыға келесі белгілеу қолданылады:

$$\nabla_{\mathbf{v}} U = (\mathbf{v}[u^1], \mathbf{v}[u^2], \mathbf{v}[u^3]) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{v}[u^i] e_i$$

мұндағы анықталған туынды R^3 кеңістігіндегі ковариантты туынды болып есептеледі.

M бетінде қандайда нүктедегі ковариантты туындыны шығару үшін R^3 -те ковариантты туындыны M бетінің жанама жазықтығына проекциялау қажетті болады [13, б. 228].

Мысал 1. $M: r(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$ бетінде

$$Z = \sum_k z^k(x_1, x_2, x_3) e_k$$

векторлық өрісі берілген болсын, онда

$$\nabla_{r_u} Z = \sum_k \left(\sum_i \frac{\partial z^k}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u} \right) e_k,$$

$$\nabla_{r_v} Z = \sum_k \left(\sum_i \frac{\partial z^k}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial v} \right) e_k.$$

Сонымен қатар, туындының ережесі бойынша екінші ковариантты туындылары [26, б. 83] коммутативті болады, яғни

$$\nabla_{r_v} \nabla_{r_u} Z = \sum_k \left\{ \sum_i \left[\left(\sum_j \frac{\partial^2 z^k}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_i \partial x_j}{\partial u \partial v} \right) + \frac{\partial z^k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v} \right] \right\} e_k = \nabla_{r_u} \nabla_{r_v} Z.$$

Енді бірлік нормалдың U векторлық өрісіне оралайық. Бағытас туынды анықтамасы [26, б. 81] бойынша,

$$\nabla_{\mathbf{v}} U = \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} (u^i(\alpha(t))) \Big|_{t=0} e_i$$

мұндағы $\alpha(0) = p$ және $\alpha'(0) = \mathbf{v}$.

Ескерту: Егер $U(t)$ функциясы $\alpha(t)$ қисығымен анықталса, онда туындының ережесі әрбір координатаға қолданылады, яғни, $U_t = \frac{dU}{dt} = \nabla_{\alpha'(t)} U$. Жогарыда қойылған мақсатымыз бойынша, $\nabla_{\mathbf{v}} U$ белгілеуі \mathbf{v} бағытында M бетінің қалай иілетінін білдіреді. Бұл өз кезегінде $\nabla_{(\cdot)} U$ – форма деген ұғымға әкеледі.

M бетінің p нүктесінде **форма операторы (Вейнгартен бейнелеуі)** [26, б. 84] деп -

$$S_p(\mathbf{v}) = -\nabla_{\mathbf{v}} U$$

арқылы анықталған операторды атайды.

S_p анықтамасында теріс (-) таңбасы беттің «оң» және «теріс» қисықтықтарына сәйкес мағыналары ыңғайлы болу үшін жазылған. Келесі лемманың себебінен S_p – оператор деп аталады.

Лемма 2 [26, б. 84].

S_p түрлендіруі $T_p(M)$ жанама жазықтығын өз-өзіне көшіретін сызықты түрлендіру болып табылады.

Дәлелі.

$$T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) \quad (1.1)$$

$$T(c \cdot \mathbf{v}) = c \cdot T(\mathbf{v}) \quad (1.2)$$

кез келген c тұрақтысы, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ векторлары үшін (1.1), (1.2) қасиеттері орындалатын $T: V \rightarrow V$ түрлендіруі V векторлық кеңістігін өз-өзіне көшіретін **сызықты түрлендіру** деп аталады.

Лемманы дәлелдеу үшін біріншіден, $S_p(\mathbf{v})$ векторы U -ға перпендикуляр (себебі, бұл вектор p нүктесінде анықталған және $T_p(M)$ жанама жазықтығына тиісті болғандықтан) екенін көрсету жеткілікті. U – бірлік векторы, сондықтан $U \cdot U = (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 = 1$ және Лейбниц ережесінен $\mathbf{v}[U \cdot U] = 2\nabla_{\mathbf{v}}U \cdot U$ шығады. Кез келген \mathbf{v} жылдамдық векторы үшін $0 = \mathbf{v}[1] = \mathbf{v}[U \cdot U] = 2\nabla_{\mathbf{v}}U \cdot U$. Яғни, $\nabla_{\mathbf{v}}U \cdot U = 0$ және $\nabla_{\mathbf{v}}U$ векторы U -ға перпендикуляр болады.

S_p сызықты екенін көрсету үшін

$$S_p(a\mathbf{v}) = aS_p(\mathbf{v}), a \in R \quad (1.3)$$

$$S_p(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = S_p(\mathbf{v}) + S_p(\mathbf{w}) \quad (1.4)$$

қасиеттерді тексереміз. (1.3) қасиет тікелей $\nabla_{\mathbf{v}}U$ анықтамасынан шығады. Ал (1.4) қасиетті тексеру үшін кез келген f функциясына градиент формуласын қолдансақ, $(\mathbf{v} + \mathbf{w})[f] = \mathbf{v}[f] + \mathbf{w}[f]$ теңдігін аламыз. Сондықтан S_p үшін (1.4) қасиет орындалады. ■

$S_p: T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ сызықты түрлендіру болғандықтан, оны талдау үшін сызықты алгебраның барлық құралдарын қолдануға болады. Дербес жағдайда, S_p матрицалық формасы бар және анықтауыш, із және меншікті мәндер сияқты стандартты инварианттарының терең геометриялық маңыздылығы бар. R^3 кеңістігінің ішіне енгізілген беттердің геометриясын зерттеу құралдарының барлығының іргетасы - форма операторы болып табылады.

Мысал 2. M беті R^3 кеңістігіндегі жазықтық болсын [26, б. 84].

$U = \sum_{i=1}^3 u^i e_i$ тұрақты екенін білеміз. u^i тұрақтылар, барлық \mathbf{v} үшін $\mathbf{v}[u^i] = 0$. Барлық \mathbf{v} үшін $S_p(\mathbf{v}) = -\nabla_{\mathbf{v}}U = -\sum_{i=1}^3 \mathbf{v}[u^i] e_i = 0$. Бұл жерде форма операторының мағынасы – берілген жазықтық жазық болғандықтан, оператор «форманы» анықтамайды.

Мысал 3. $S^2(R)$ – радиусы R тең сфера [26, б. 84].

Радиусы R сфера үшін $r(u, v) = (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v, R \sin v)$ стандарт параметризациясы және

$$\begin{aligned} r_u &= (-R \sin u \cos v, R \cos u \cos v, 0) \\ r_v &= (-R \cos u \sin v, -R \sin u \sin v, R \cos v) \end{aligned}$$

жанама базис векторларын қолданамыз.

Ал бірлік нормал вектор келесі түрде беріледі:

$$U = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$$

S_p форма операторын түсіну үшін $S^2(R)$ -де S_p операторы $\{r_u, r_v\}$ базисіне қалай әсер ететінін білу жеткілікті.

$$r_u[f] = \frac{\partial f}{\partial u} = f_u \text{ және } r_v[f] = \frac{\partial f}{\partial v} = f_v \text{ болатынын білеміз. Сонымен,}$$

$$S(r_u) = -\nabla_{r_u} U = -(r_u[\cos u \cos v], r_u[\sin u \cos v], r_u[\sin v]) =$$

$$= -(-\sin u \cos v, \cos u \cos v, 0) = -\frac{r_u}{R}$$

сол сияқты, $S(r_v) = -\frac{r_v}{R}$. Қорыта келе, форма операторы әрбір жанама векторды $-\frac{1}{R}$ -ге көбейтеді. Осы операторға сәйкес матрица $-\frac{1}{R} I$ түрінде, мұндағы I матрицасы 2×2 бірлік матрица болып табылады.

Теорема 1 [26, б. 85].

Егер кез келген $p \in M$ үшін $S_p = 0$ болса, онда M беті жазықтыққа тиісті болады.

Дәлелі. $p \in M$ нүктесін бекітіп, $U(p)$ бірлік нормалын сол нүктеде жүргізейік және кез келген $q \in M$ алайық. Біз q нүктесі p және $U(p)$ арқылы жазықтықта анықталатынын көрсетеміз. Яғни, $(q - p) \cdot U(p) = 0$. q кез келген нүкте болғандықтан, M беті толығымен осы жазықтыққа тиісті болады. M бетінде қандайда α қисығын $\alpha(0) = q$ және $\alpha(1) = p$ болатындай алайық және

$$f(t) = (q - \alpha(t)) \cdot U(\alpha(t))$$

функциясын анықтайық.

Көбейту ережесі және $\frac{dU}{dt} = \nabla_{\alpha'(t)} U$ теңдігі осы f функциясының туындысын былай табуға мүмкіндік береді:

$$f'(t) = -\alpha'(t) \cdot U(\alpha(t)) + (q - \alpha(t)) \cdot \nabla_{\alpha'(t)} U(\alpha(t)) = 0$$

мұндағы $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}(M)$ қисығы \mathbf{v} -бағытында $U(\alpha(t))$ бірлік нормалына перпендикуляр болады және жорамалымыз бойынша $\nabla_{\alpha'(t)} U(\alpha(t)) = -S_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = 0$ орындалады.

f функциясының туындысы нөл болғандықтан, $f(t)$ тұрақты функция болады. Осы тұрақтыны табу үшін f функциясының 0-де анықтауымыз керек. Бірақ $f(0) = 0$ себебі, $\alpha(0) = q$,

$$(q - \alpha(t)) \cdot U(\alpha(t)) = 0$$

теңдігі барлық t үшін орындалады. Дербес жағдайда $t = 1$ үшін $(q - p) \cdot U(p) = 0$.

■

1.3 Беттердің сызықты алгебрасы

Теорема 2 [26, б. 88]. Форма операторы сызықты симметриялық түрлендіру болып табылады. Сонымен қатар

$$S(r_u) \cdot r_u = r_{uu} \cdot U \quad (1.5)$$

$$S(r_u) \cdot r_v = r_{uv} \cdot U \quad (1.6)$$

$$S(r_v) \cdot r_v = r_{vv} \cdot U \quad (1.7)$$

теңдіктері орындалады.

Дәлелі. $T_p(M)$ жанама жазықтығында $\{r_u, r_v\}$ базис болғандықтан, біз r_u және r_v қатысты теңдіктерді көрсетсек жеткілікті. $U \cdot r_u = 0 = U \cdot r_v$ себебі, $T_p(M)$ жазықтығындағы U бірлік нормал болып табылады. $U \cdot r_u$ және $U \cdot r_v$ функциялар болғандықтан, оған вектормен әсер ете аламыз. Яғни,

$$\begin{aligned} 0 &= r_u[0] = r_u[U \cdot r_v] = r_u \left[\sum_i u^i \frac{\partial x^i}{\partial v} \right] = \\ &= \sum_i \left(r_u[u^i] \frac{\partial x^i}{\partial v} + u^i r_u \left[\frac{\partial x^i}{\partial v} \right] \right) = \end{aligned}$$

Лейбниц ережесі бойынша

$$\begin{aligned} &= \sum_i \left(r_u[u^i] e_i \cdot r_v + u^i \frac{\partial^2 x^i}{\partial u \partial v} \right) = \\ &= \nabla_{r_u} U \cdot r_v + U \cdot r_{vu} \end{aligned}$$

және соңғы теңдіктен $S_p(r_u) \cdot r_v = -\nabla_{r_u} U \cdot r_v = U \cdot r_{vu}$ шығады. Дәл сол сияқты есептеулерден

$$S_p(r_v) \cdot r_u = -\nabla_{r_v} U \cdot r_u = U \cdot r_{uv}$$

және $r_{uv} = r_{vu}$ болғандықтан, (1.6) шығады.

Сонымен, жоғарыдағы есептеулер сияқты (1.5),(1.7) теңдіктері $S(r_u) \cdot r_u = r_{uu} \cdot U$ және $S(r_v) \cdot r_v = r_{vv} \cdot U$ шығады. ■

Сызықты алгебраның дифференциалдық геометрияда қолданудың тағы да басқа жолы бар. Ол келесі беттердің бейнелеуі: $F: M \rightarrow N$. Біз осы жерде *туындыны* [26, б. 89] $F_p^*: T_p(M) \rightarrow T_{F(p)}(N)$ бейнелеуінде яғни, барлық F_p^* жанама жазықтықтарында нақты сызықты түрлендіру арқылы анықтаймыз. Қысқаша F^* сызықты түрлендіруі былай анықталады: \mathbf{v} жанама векторы

болсын, онда сызықты түрлендіру $\alpha(0) = p$ және $\alpha'(0) = v$ шарттары орындалатын $\alpha: I \rightarrow M$ қисығы арқылы анықталады және

$$F^*(\alpha'(0)) = \left. \frac{d}{dt} (F(\alpha(t))) \right|_{t=0}.$$

Енді $\beta(t) = F(\alpha(t))$ - N бетіндегі жай қисық және соңғы теңдікте F^* -ның оң жағы β қисығының $F(p)$ бейнесінде жай жылдамдық векторы болып табылады. Бұл $F(p)$ бейнесі дегеніміз - M бетін p нүктесінің маңайында $T_p(M)$ жанама жазықтығымен сызықты жуықтау деген мағынаны білдіреді. $T_p(M)$ жазықтығында әрбір жылдамдық векторы v болатын қисығы бар. Сол қисықтар p нүктесінің маңайындағы облыстарды және F қисықтардың бейнелері $F(p)$ бейнесіндегі облыстарды толықтырады. Қисықтың бейнесінің жылдамдық векторы - M бетіндегі қисықтың жылдамдық вектордың бейнесі болып табылады.

Мысал 4 [26, б. 89]. $F: R^2 \rightarrow R^2$ жазықтықты өз-өзіне бейнелеуі берілсін және координаталық түрде $F(u, v) = (f(u, v), g(u, v))$ болады. $F^*(r_u)$ есептеу үшін параметрлік u – қисығы, яғни, (u, v_0) -дің F композициясын аламыз. $F(u, v_0) = (f(u, v_0), g(u, v_0))$ және (f_u, g_u) – u -ға қатысты дифференциалдау деп белгілейміз. Сол сияқты есептеулер параметрлік v – қисығына да жүргізіп,

$$F^*(r_u) = (f_u, g_u) \quad \text{және} \quad F^*(r_v) = (f_v, g_v)$$

аламыз.

Сызықты түрлендірулер мен матрицалар арасында өзара сәйкестік деп $\{r_u, r_v\}$ базисіне қатысты F^* үшін жазылатын келесі түрдегі матрицаны айтамыз:

$$J(F) = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}.$$

Бұл көп айнымалылы есептеулерде белгілі Якоби матрицасы болып табылады.

Беттің бейнелеуінің туындысы – беттің жалпыланған картасы болады, ал сол картаның Якобианы R^n -ді өз-өзіне бейнелейді.

$f: R \rightarrow R$ бейнелеуі үшін $f'(a) \neq 0$ болсын, онда функцияның үзіліссіздігінен кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ болатын $f'(x) \neq 0$ шығады. Барлық x -тер үшін $f'(x) > 0$ немесе $f'(x) < 0$ болады. Бұдан f функциясы осы интервалда қатаң өспелі немесе қатаң кемімелі екендігі шығады, ал ондай функцияның $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ интервалында кері функциясы табылады. Дәл осы жағдай (*Кері функция туралы теорема*) $F: M \rightarrow N$ бейнелеуі үшін де орындалады.

Теорема (Кері функция туралы) [26, б. 90]. Егер $F: M \rightarrow N$ беттер бейнесінің $\det(F_p^*) \neq 0$ болатындай $F_p^*: T_p(M) \rightarrow T_{F(p)}(N)$ туынды түрлендіруі бар болса, онда $F(p)$ -нің F^{-1} тегіс кері функциясы анықталады және $F(p) \in N$ бейнелеуінің 0 кіші ашық маңайы табылады.

Кері функция туралы теореманың тұжырымы бойынша, қандайда нүктеде F -тің сызықты алгебрасы M және N беттерінің сол нүктеде бірдей екендігін анықтайды.

Демек, форма операторы жанама жазықтықтың сызықты түрлендіруі болады екен, сондықтан біз туындысы $\pm S_p$ болатын беттердің бейнелеуі бар ма деген сұрақты қарастырсақ болады. Жауабы ондай бейнелеулер бар, себебі, туындысы $\pm S_p$ болатын бейнелеу – **Гаусс бейнелеуі [26, б. 90]** деп аталады және бұл бейнелеу форма операторының сызықты алгебралық нәтижелеріне қарағанда геометриялық мағынасын қамтамасыз етеді.

$G: M \rightarrow S^2$ Гаусс бейнелеуі M бетін S^2 бірлік сфераға бейнелейді және

$$G(p) = U(p)$$

түрінде беріледі, мұндағы $U(p)$ – M бетінің p нүктесіндегі бірлік нормалы.

$U(p)$ бірлік векторы R^3 -те болғандықтан, S^2 бірлік сферасындағы нүкте ретінде қарастыруға болады. Сонымен, Гаусс бейнелеуінің индукцияланған туынды бейнелеуі бар $G^*: T_p M \rightarrow T_{G(p)} S^2$, яғни, анықтама бойынша келесі түрде беріледі [26, б. 90]:

$$G^*(\mathbf{v}) = \left. \frac{d}{dt} (G(\alpha(t))) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (U(\alpha(t))) \right|_{t=0} = \nabla_{\alpha'(0)} U = \nabla_{\mathbf{v}} U = -S(\mathbf{v})$$

мұндағы $\alpha(0) = p$ және $\alpha'(0) = \mathbf{v}$.

Форма операторының мәндер облысы $T_p(M)$, ал Гаусс бейнелеуі туындысының мәндер облысы $T_{G(p)}(S^2)$ болып табылады, онда неліктен $G^* = -S_p$ болатынын қарастырайық.

$T_p(M)$ жанама жазықтығы $U(p)$ нормасына перпендикуляр болады.

Кез келген $q \in S^2$ нүктелері үшін $T_q(S^2)$ жанама жазықтығының q нүктесінде R^3 кеңістігінде берілген векторға перпендикуляр болатын қасиеті бар. Анықтама бойынша, $G(p) = U(p)$ болғандықтан, $T_{G(p)}(S^2)$ жазықтығы $U(p)$ нормасына перпендикуляр болады. Сондықтан, $T_p(M) = T_{G(p)}(S^2)$.

Жаттығу 1 [26, б. 90]. $r(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v)$ конусы үшін Гаусс бейнелеуін және оның туындысын табыңыз.

Жаттығу 2 [26, б. 90]. $r(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v)$ цилиндрі үшін Гаусс бейнелеуін және оның туындысын табыңыз.

1.4 Нормал қисықтық

Беттің қисықтығы [13, б. 159], [47, б. 374] ұғымын енгізу үшін форма операторын енгізуіміз керек. Біріншіден, нормал қисықтықтың геометриясына байланысты лемманы қарастырып, содан кейін S_p [26, б. 84] операторының сызықты алгебрасының да геометриялық мағынасына арналған теореманы дәлелдейміз.

Лемма 3 [26, б. 91]. Егер M бетінде α қисығы берілсе, онда $\alpha'' \cdot U = S(\alpha') \cdot \alpha'$ теңдігі орындалады.

Дәлелі. Біріншіден, $\alpha' \cdot U = 0$ екені белгілі U векторы $T_p(M)$ жазықтығына нормал болады.

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha'[\alpha' \cdot U] = \\ &= \alpha' \left[\sum_i \alpha^{i'} u^i \right] = \\ &= \sum_i \alpha'[\alpha^{i'}] u^i + \sum_i \alpha^{i'} \alpha'[u^i] \end{aligned} \quad (1.8)$$

Соңғы (1.8) теңдігіне Лейбниц ережесін қолданып,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i \frac{d^2 \alpha^i}{dt^2} u^i + \sum_i \alpha'[u^i] e_i \cdot \alpha' \\ &= \alpha'' \cdot U + \nabla_{\alpha'} U \cdot \alpha' \end{aligned}$$

теңдігін аламыз.

Себебі, $\alpha^{i'}(\alpha(t)) = \frac{d\alpha^i}{dt}(t)$,

Яғни, $S(\alpha') \cdot \alpha' = -\nabla_{\alpha'} U \cdot \alpha' = \alpha'' \cdot U$.

Екіншіден, негізгі лемма бойынша, $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$ және туындының ережесін $\alpha' = u' r_u + v' r_v$ қолданып,

$$\alpha'' = u'^2 r_{uu} + 2u'v' r_{uv} + v'^2 r_{vv} + u'' r_u + v'' r_v$$

аламыз. Енді $r_u \cdot U = 0$ және $r_v \cdot U = 0$, сондықтан

$$\alpha'' \cdot U = (u'^2 r_{uu} + 2u'v' r_{uv} + v'^2 r_{vv}) \cdot U$$

болады.

S_p сызықты түрлендіру болғандықтан,

$$\begin{aligned} S(\alpha') \cdot \alpha' &= S(u' r_u + v' r_v) \cdot (u' r_u + v' r_v) = \\ &= (u' S(r_u) + v' S(r_v)) \cdot (u' r_u + v' r_v) = \\ &= u'^2 S(r_u) \cdot r_u + u'v' S(r_u) \cdot r_v + u'v' S(r_v) \cdot r_u + v'^2 S(r_v) \cdot r_v = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= u'^2 r_{uu} \cdot U + u'v' r_{uv} \cdot U + u'v' r_{uv} \cdot U + v'^2 r_{vv} \cdot U = \\
&= (u'^2 r_{uu} + 2u'v' r_{uv} + v'^2 r_{vv}) \cdot U = \alpha'' \cdot U.
\end{aligned}$$

Үшіншіден, $0 = \alpha' \cdot U$ теңдіктің екі жағынан да туынды алайық,

$$0 = (\alpha' \cdot U)' = \alpha'' \cdot U + \alpha' \cdot U'$$

мұндағы $U' = \nabla_{\alpha'} U = -S(\alpha')$

Сонымен, $\alpha'' \cdot U = -\alpha'(-S(\alpha'))$ және $\alpha'' \cdot U = \alpha' \cdot S(\alpha')$.

■

$\alpha'' \cdot U$ көбейтіндісін M бетінің қисықтығына қажет болатын жылдамдық компоненттерімен өрнектейміз. α қисығының бірлік жылдамдығы бар.

$\mathbf{u} \in T_p(M)$ бірлік векторы үшін M бетінің \mathbf{u} -бағыты бойынша *нормал қисықтығы* [26] дегеніміз -

$$k(\mathbf{u}) = S_p(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}.$$

α – бірлік-жылдамдық қисығы үшін $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = \mathbf{u}$ болсын. Онда

$$\begin{aligned}
k(\mathbf{u}) &= S_p(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = S_p(\alpha'(0)) \cdot \alpha'(0) = \alpha''(0) \cdot U(p) = \kappa(0)N(0) \cdot U(p) = \\
&= \kappa(0)\cos\theta
\end{aligned}$$

мұндағы N – α қисығының Френе нормалы және κ (*каппа*) – α -ның қисықтығы, θ – $N(0)$ мен $U(p)$ арасындағы бұрыш.

Тұжырым [26, б. 93].

Егер $U(p)$ және \mathbf{u} ($p \in M$) арқылы анықталған жазықтықты P деп, ал $P \cap M$ арқылы құрастырылған бірлік-жылдамдық қисықты σ деп белгілесек ($\sigma(0) = p$), онда

$$k(\mathbf{u}) = \pm\kappa_\sigma(0).$$

Дәлелі. Біріншіден, $\sigma'(0) = \mathbf{u}$ екенін көрсетейік. Ол үшін \mathbf{u} және $\sigma'(0)$ бірлік жанама векторлар, ал $\mathbf{u}, \sigma'(0)$ және $U(p)$ жалғыз жазықтыққа тиісті болатынын білеміз. Атап айтқанда, \mathbf{u} және $\sigma'(0)$ екеуі де $U(p)$ бірлік векторына перпендикуляр болады, яғни, P жазықтығында $\sigma'(0) = \pm\mathbf{u}$ теңдігі орындалады. $\sigma'(0) = \mathbf{u}$ теңдігінен параметризация алайық. σ қисының $N_\sigma(0)$ нормасы $T_\sigma(0) = \sigma'(0) = \mathbf{u}$ бірлік жанама векторына перпендикуляр және $N_\sigma(0)$ нормасы P жазықтығына тиісті болады, себебі, σ жазық қисық. Сондықтан $N_\sigma(0) = \pm U(p)$. $\cos\theta = \pm 1$ болу үшін $\theta = 0$ немесе π . Қорыта келе, $k(\mathbf{u}) = \pm\kappa_\sigma(0)$.

■

Нормал қисықтық дегеніміз – бірлік векторды жазықтыққа көшіретін функция, яғни, радиусы 1-ге тең шеңберді нақты сандарға бейнелейді. Нормал қисықтық үзіліссіз функция болып табылады. Ал кез келген үзіліссіз функция тұйық интервалда максимум және минимум мәндеріне жетеді, сол сияқты шеңбер, компакты (тұйық және шектелген) жиынында да үзіліссіз функция максимум және минимум мәндеріне жетеді.

Келесі теңдіктер орындалатындай \mathbf{u}_1 және \mathbf{u}_2 бірлік векторларын қарастырайық:

$$k(\mathbf{u}_1) = k_1 = \max_{\mathbf{u}} k(\mathbf{u}), \quad k(\mathbf{u}_2) = k_2 = \min_{\mathbf{u}} k(\mathbf{u}).$$

\mathbf{u}_1 және \mathbf{u}_2 бірлік векторлары *бас векторлар*, ал k_1 және k_2 *бас қисықтықтар* деп аталады.

Келесі мысалда нормал қисықтықты есептеу үшін Френе формулалары [28, б. 6] қолданылады.

Мысал 5. (Ершік бетінің нормал қисықтығы, [26, б. 94]).

M ершік бет $z = x^2 - y^2$ болсын. $g(x, y, z) = z - x^2 + y^2 = 0$ градиент арқылы берілген U нормалын қолданамыз, яғни,

$$U = \frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \frac{(-2x, 2y, 1)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}},$$

$p = (0,0,0)$ болсын, онда $U(p) = (0,0,1)$.

Мысалы, $\mathbf{u} = (1,0,0)$ болсын. Ал σ қисығы - M бетімен спан болатын $(0,0,1)$ және $(1,0,0)$ арқылы анықталған жазықтығымен қиылысында $z = x^2$ параболасы болады. Осы парабола нормал бағытында болғандықтан, $k(\mathbf{u}) > 0$ екенін көрсету керек.

xz жазықтығында \mathbf{u} және $U(p)$ арқылы анықталған нормал вектор $\mathbf{u} \times U(p) = (0, -1, 0)$ болады. σ қисығы $z = x^2$ парабола, параметрлік түрде $\sigma(t) = (t, 0, t^2)$ жазылады. Онда $\sigma'(t) = (1, 0, 2t)$ және $\sigma''(t) = (0, 0, 2)$ есептеп,

$$k(1,0,0) = +k_{\sigma}(0) = \frac{|\sigma'(0) \times \sigma''(0)|}{|\sigma'(0)|^3} = \frac{2}{1} = 2 > 0$$

табамыз. Енді барлық Френе жақтарын келесі түрде табуымызға болады:

$$T = \frac{\sigma'}{|\sigma'|} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}}, 0, \frac{2t}{\sqrt{1 + 4t^2}} \right),$$

$T(0) = (1,0,0)$ және $B = \frac{\sigma' \times \sigma''}{|\sigma' \times \sigma''|} = (0, -1, 0)$. Ал $N = B \times T = (0, 0, 1) = U$ оң таңбамен табамыз. $k(1,0,0) = +k_\sigma(0)$ теңдігі орындалады.

Жаттығу 3 [26, б. 94] $p = (0,0,0)$ нүктесінде $k(\mathbf{u})$ табу керек, мұндағы $\mathbf{u} = (0,1,0)$.

Сонымен, берілген бет пен жазықтықтың қиылысында анықталған қисықтың қисықтығы ретінде нормал қисықтықтың геометриялық мағынасы толығымен сипатталды. Енді S операторының сызықты алгебрасының геометриялық мағынасына арналған негізгі теореманы келтіреміз.

Егер p нүктесінде бас қисықтықтар тең болса (яғни, $k_1(p) = k_2(p)$), онда $p \in M$ нүктесі *омбиликалық нүкте* [13, б. 174] деп аталады. Бұл жағдайда, p нүктесінде нормал қисықтық тұрақты болады. Мәселен, сферада кез келген нүкте омбиликалық нүкте болып табылады.

Теорема 3 [26, б. 96].

1. Егер $p \in M$ омбиликалық нүкте болса, онда $S_p(\mathbf{u}) = k\mathbf{u}$, мұндағы $k = k_1 = k_2$.

2. Егер $p \in M$ омбиликалық нүкте болмаса, онда S_p операторының меншікті мәндеріне (p нүктесінде бас қисықтықтарға) сәйкес дәл екі перпендикуляр бірлік меншікті векторлары табылады.

Дәлелі. k_1 және k_2 форма операторының меншікті мәндері болсын. S операторының λ_1 меншікті мәніне сәйкес \mathbf{u}_1 бірлік меншікті векторы болсын. Яғни, $S(\mathbf{u}_1) = \lambda_1 \mathbf{u}_1$.

\mathbf{u}_1 векторынан сағат тіліне қарсы 90° бұрышқа бұрылған \mathbf{u}_2 векторы – бірлік жанама вектор болсын, яғни, $\mathbf{u}_2 = U \times \mathbf{u}_1$. Сондықтан $S(\mathbf{u}_2) = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2$ жазуға болады. Бірақ $a = S(\mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{u}_1 = S(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{u}_2 = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$ себебінен, $S(\mathbf{u}_2) = \lambda_2 \mathbf{u}_2$ мұндағы $b = \lambda_2$ шығады.

S операторының басқа бір \mathbf{u}_2 меншікті векторы \mathbf{u}_1 векторына перпендикуляр екені шығады. Сонымен қатар, $k(\mathbf{u}_i) = S(\mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_i = \lambda_i$, сондықтан λ_1 және λ_2 меншікті мәндері p нүктесінде нормал қисықтықтар болып табылады.

Егер $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ болса, онда барлық \mathbf{u} үшін $S(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}$ және p омбиликалық нүкте болатынын ескертейік. $\lambda_2 < \lambda_1$ болсын және \mathbf{u} бірлік векторы $\mathbf{u} = \cos\theta \mathbf{u}_1 + \sin\theta \mathbf{u}_2$ түрінде жазылады, мұндағы θ бұрышы \mathbf{u} және \mathbf{u}_1 арасындағы бұрыш болсын.

$k(\theta)$ деп \mathbf{u} векторының θ бұрышына тәуелділігін белгілейміз және осы \mathbf{u} векторына сәйкес нормал қисықтықты келесідей есептейміз:

$$k(\theta) = S(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = S(\cos\theta \mathbf{u}_1 + \sin\theta \mathbf{u}_2) \cdot (\cos\theta \mathbf{u}_1 + \sin\theta \mathbf{u}_2) = (\cos\theta S(\mathbf{u}_1) + \sin\theta S(\mathbf{u}_2)) \cdot (\cos\theta \mathbf{u}_1 + \sin\theta \mathbf{u}_2) =$$

$= \cos^2 \theta S(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{u}_1 + \sin \theta \cos \theta S(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{u}_2 + \sin \theta \cos \theta S(\mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{u}_1$
 $+ \sin^2 \theta S(\mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{u}_2 = \cos^2 \theta \lambda_1 + \sin^2 \theta \lambda_2,$
 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ негізгі тригонометриялық теңдікті қолданып, $k(\theta) = \lambda_1 +$
 $(\lambda_2 - \lambda_1) \sin^2 \theta$ аламыз. $\lambda_2 < \lambda_1$ себебінен, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$ болғанда, $\theta = 0$ мәнінде
 $k(\theta)$ максимумға жетеді. Яғни, $k_1 = k_{max}(\theta) = k(\mathbf{u}_1) = \lambda_1.$

Дәл сол сияқты, $k(\theta) = (\lambda_1 - \lambda_2) \cos^2 \theta + \lambda_2$ түрінде жазуға да болады, $\lambda_2 <$
 λ_1 себебінен, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_2$ болғанда, $\theta = \frac{\pi}{2}$ мәнінде $k(\theta)$ минимумға жетеді.
 Сонымен, $k_2 = k_{min}(\theta) = k(\mathbf{u}_2) = \lambda_2$ шығады.

Салдары.

$\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{u}_1 + \sin \theta \mathbf{u}_2$ бірлік векторы үшін **нормал қисықтық**

$$k(\mathbf{u}) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$$

Эйлер формуласы ([13, б. 167], [26, б. 96], [28, б. 20], [47, б. 256]) арқылы беріледі.

1.5 Гаусстық және орташа қисықтықтар

M бетінде S форма операторы болсын.

M бетінің $p \in M$ нүктесіндегі *Гаусстық қисықтық* ([26, б. 107], [28, б. 20])

$K(p) = \det(S_p)$ арқылы анықталады.

M бетінің $p \in M$ нүктесіндегі *орташа қисықтық* ([26, б. 107], [28, б. 21])

$H(p) = \frac{1}{2} \text{trace}(S_p)$ арқылы анықталады.

Беттің геометриясын қарастыруға арналған K және H фундаменталды шамалар форма операторы терминінде анықталған. Сондықтан бұл жерде геометрияны қарастырғанда қандайда есептеулер жүргізу үшін сызықты алгебра таптырмас құрал болып табылады.

Бас векторлардың базисіне қатысты форма операторының матрицалық түрі келесідей болады:

$$\begin{pmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{pmatrix},$$

бұл матрицаның анықтаушы $k_1 k_2$ және матрицаның ізі $k_1 + k_2$, сондықтан

$$K = k_1 k_2, H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Беттерді қарастырғанда K мәнінің таңбасы өте маңызды болады.

Егер U нормасының орнына $-U$ таңдалса, онда $k(u)$ таңбасын өзгертеді. Гаусс қисықтығы бас векторлардың көбейтіндісі болғандықтан, ол таңбасын өзгертпейді. Бірақ H орта қисықтығы бірлік нормалдың өзгеруінен таңбасын өзгертеді.

$K(p) > 0$ болсын. $K = k_1 k_2$ себебінен, k_1 және k_2 таңбалары бірдей болуы керек.

Бірақ $k_1 = \max k(\mathbf{u})$ және $k_2 = \min k(\mathbf{u})$, сондықтан барлық \mathbf{u} үшін $k(\mathbf{u})$ таңбалары бірдей болады. Егер барлық \mathbf{u} үшін $k(\mathbf{u}) > 0$ болса, онда M бетінің иілімі U нормасының кез келген бағытында бағыттас болады. Егер барлық \mathbf{u} үшін $k(\mathbf{u}) < 0$, онда M бетінің иілімі U нормасының кез келген бағытынан алшақ болады.

Мысал 6 (Беттің иілімі және Гаусс қисықтығы)[26, б. 108].

а) $K(p) > 0$ шарты үшін $p = (0,0,0)$ нүктесінде $z = x^2 + y^2$ эллипстік параболоидын қарастырайық. Бұл параболоид p нүктесінде xu жазықтығына жанама болады және вертикаль нормалды қалай таңдасақ та, $k(\mathbf{u})$ барлығы теріс немесе барлығы оң болады.

б) $K(p) < 0$ шарты үшін $p = (0,0,0)$ нүктесінде $z = x^2 - y^2$ гиперболалық параболоидын қарастырайық. Бұл жерде де p нүктесінде xu - жанама жазықтық болады. Бірақ беттің иілімі нормал бағытынан алшақ және нормал бағытымен бірдей де болады.

Енді беттің қисықтықтарын сызықты алгебрада есептеулеріне тоқталайық.

\mathbf{v} және \mathbf{w} векторлары $p \in M$ нүктесінде сызықты тәуелсіз жанама векторлар болсын. Бұл бір вектор басқа вектордың көбейтіндісі арқылы алынбайды деген сөз. Осы сызықты тәуелсіздік және кез келген вектор сол векторлардың сызықты комбинациясы болса, $T_p(M)$ жанама жазықтығында \mathbf{v} және \mathbf{w} векторлары базис құрайды. Форма операторының [26, б. 108] әсерінен

$$S(\mathbf{v}) = a\mathbf{v} + b\mathbf{w} \text{ және } S(\mathbf{w}) = c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$$

түрінде жаза аламыз.

S_p операторының $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ базисіне қатысты матрицасы $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ болады. Анықтама бойынша, $\det(S) = ad - bc = K$ және $\text{tr}(S_p) = a + d = 2H$, сондықтан [26, б. 108]

$$\begin{aligned} S(\mathbf{v}) \times S(\mathbf{w}) &= (a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) \times (c\mathbf{v} + d\mathbf{w}) = \\ &= ac(\mathbf{v} \times \mathbf{v}) + ad(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + bc(\mathbf{w} \times \mathbf{v}) + bd(\mathbf{w} \times \mathbf{w}) = \\ &= 0 + (ad - bc)(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + 0 = \det(S)\mathbf{v} \times \mathbf{w} = K\mathbf{v} \times \mathbf{w}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$S(\mathbf{v}) \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times S(\mathbf{w}) = (a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times (c\mathbf{v} + d\mathbf{w}) =$$

$$\begin{aligned}
&= a(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + d(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (a + d)(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \\
&= \text{tr}(S)\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 2H\mathbf{v} \times \mathbf{w}.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Лагранж теңдігі [26, б. 109]. \mathbf{v}, \mathbf{w} және \mathbf{a}, \mathbf{b} векторлары үшін

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{a})$$

теңдігі орындалады.

Енді (1.9) және (1.10) теңдіктерінде K - Гаусстық қисықтық, H – орташа қисықтықты табу үшін теңдіктің екі жағын да $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ векторына көбейтіп, Лагранж теңдігін қолданып, келесі нәтижелерді аламыз [26, б. 109]:

$$(S(\mathbf{v}) \times S(\mathbf{w})) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = K(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

$$(S(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v})(S(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{w}) - (S(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w})(S(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}) = K((\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}))$$

$$K = \frac{(S(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v})(S(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{w}) - (S(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w})(S(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}))}{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})} \tag{1.11}$$

және

$$\begin{aligned}
&(S(\mathbf{v}) \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times S(\mathbf{w})) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 2H(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \\
&= (S(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}) - (S(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(S(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{w}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})(S(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}) = \\
&= 2H((\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H &= \frac{(S(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}) - (S(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}))}{2((\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}))} + \\
&+ \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(S(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{w}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})(S(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{v})}{2((\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}))}
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Жаттығу 4 [26, б. 109].

Беттің бас қисықтықтары k_1, k_2 - K және H арқылы өрнектелетінін көрсетіңіз:

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}, \quad k_2 = H - \sqrt{H^2 - K},$$

мұндағы $k_1, k_2 - S_p$ түрлендіруінің меншікті мәндері.

$$S_p = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 - \text{tr}(S_p)\lambda + \det(S_p) = 0.$$

Гаусстық және орташа қисықтықтарды есептеу

K және H формулалары үшін жалпы \mathbf{v} және \mathbf{w} векторлары M бетінде берілген r бүркеуі үшін r_u және r_v векторларына нақты келтіріледі. Әдетте келесі белгілеулер қолданылады:

$$E = r_u \cdot r_u, \quad F = r_u \cdot r_v, \quad G = r_v \cdot r_v, \\ l = S(r_u) \cdot r_u, \quad m = S(r_u) \cdot r_v, \quad n = S(r_v) \cdot r_v.$$

Енді (1.11),(1.12) формулаларында \mathbf{v}, \mathbf{w} векторларын r_u, r_v векторларымен алмастырып, келесі қисықтық формулаларын аламыз ([26, б. 111], [28, б. 21]):

$$K = \frac{(S(r_u) \cdot r_u)(S(r_v) \cdot r_v) - (S(r_u) \cdot r_v)(S(r_v) \cdot r_u)}{(r_u \cdot r_u)(r_v \cdot r_v) - (r_u \cdot r_v)(r_v \cdot r_u)} = \\ = \frac{ln - m^2}{EG - F^2} \quad (1.13)$$

$$H = \frac{((S(r_u) \cdot r_u)(r_v \cdot r_v) - (S(r_u) \cdot r_v)(r_v \cdot r_u) + (r_u \cdot r_u)(S(r_v) \cdot r_v) - (r_u \cdot r_v)(S(r_v) \cdot r_u))}{2((r_u \cdot r_u)(r_v \cdot r_v) - (r_u \cdot r_v)(r_v \cdot r_u))} \\ H = \frac{Gl + En - 2Fm}{2(EG - F^2)} \quad (1.14)$$

Мысал 7 (Эннепер бетінің қисықтықтары) [26, б. 112].

M беті келесі стандарт параметризация арқылы берілген Эннепер беті болсын:

$$r(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right).$$

Параметризация арқылы коэффициенттер метрикасын табуға болады.

$$r_u = (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u), \quad r_v = (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v) \quad \text{және}$$

$$E = r_u \cdot r_u = \\ = 1 + 2u^2 + 2v^2 + u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = (1 + u^2 + v^2)^2, \\ F = r_u \cdot r_v = \\ = 2uv - 2u^3v + 2uv^3 + 2uv - 2uv^3 + 2u^3v - 4uv = 0, \\ G = r_v \cdot r_v = \\ = 4u^2v^2 + 1 - v^2 + u^2 - v^2 + v^4 - v^2u^2 + u^2 - u^2v^2 + u^4 + 4v^4 = \\ = 1 + 2u^2 + 2v^2 + u^4 + 2u^2v^2 + v^4 =$$

$$= (1 + u^2 + v^2)^2.$$

U бірлік нормалын табу үшін

$$\begin{aligned} r_u \times r_v &= (-4uv^2 - 2u + 2uv^2 - 2u^3, 2v - 2u^2v + 2v^3 + 4u^2v, 1 - (u^2 - v^2)^2 \\ &\quad - 4u^2v^2) = \\ &= (-2u(1 + u^2 + v^2), 2v(1 + u^2 + v^2), 1 - (u^2 + v^2)^2) \quad \text{және} \quad \text{ұзындығының} \\ &\text{квадраты} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |r_u \times r_v|^2 &= 4u^2(1 + u^2 + v^2)^2 + 4v^2(1 + u^2 + v^2)^2 + (u^2 + v^2)^4 - 2(u^2 + v^2)^2 \\ &\quad + 1 = \\ &= 4(u^2 + v^2) + 8(u^2 - v^2)^2 + 4(u^2 + v^2)^3 + (u^2 + v^2)^4 - 2(u^2 + v^2)^2 + 1 = \\ &= (u^2 + v^2)^4 + 4(u^2 + v^2)^3 + 6(u^2 + v^2)^2 + 4(u^2 + v^2) + 1 = \\ &= (u^2 + v^2 + 1)^4, \end{aligned}$$

$$|r_u \times r_v| = \sqrt{EG - F^2} \quad \text{қолданып,}$$

$$U = \left(-\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{1 - (u^2 + v^2)^2}{(u^2 + v^2 + 1)^2} \right)$$

анықтаймыз.

Параметризацияның екінші ретті дербес туындылар

$$r_{uu} = (-2u, 2v, 2), r_{uv} = (2v, 2u, 0), r_{vv} = (2u, -2v, -2)$$

арқылы

$$\begin{aligned} l &= r_{uu} \cdot U = \\ &= \frac{4u^2}{u^2 + v^2 + 1} + \frac{4v^2}{u^2 + v^2 + 1} + \frac{2 - 2(u^2 + v^2)^2}{(u^2 + v^2 + 1)^2} = \frac{2(u^2 + v^2 + 1)^2}{(u^2 + v^2 + 1)^2} = 2, \\ n &= r_{vv} \cdot U = -2, \\ m &= r_{uv} \cdot U = 0 \end{aligned}$$

есептеледі.

Сонымен, Эннепер бетінің Гаусстық қисықтығы

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2} = \frac{-4}{(u^2 + v^2 + 1)^4}$$

және орташа қисықтығы

$$H = \frac{Gl + En - 2Fm}{2(EG - F^2)} = \frac{2(u^2 + v^2 + 1)^2 - 2(u^2 + v^2 + 1)^2}{2(u^2 + v^2 + 1)^4} = 0$$

болады.

Эннепер беті минималды бет болып есептеледі. Келесі тарауда осы беттердің параметризациясы туралы жазылады.

1.6 Минималды беттердің формулалары

XVIII ғасырдың ортасында бельгиялық физик Плато (Plateau) келесі есепті қойған еді [26, б. 170]:

С қисығы берілсін, шекарасы C болатын минималды M бетті табу керек. Плато қабықшаларға қызыққан екен және жүргізген физикалық экспериментінің нәтижесі ретінде өзінің осындай есептері пайда болды. Келесі теоремадан ауданы ең аз болатын бет минималды бет екені шығады.

Теорема [26, б. 171]. Кез келген берілген жордан қисығын қамтитын дөңгелек тәрізді ауданы ең аз минималды бет табылады.

Бұл тарауда үшөлшемді кеңістікте Вейерштрасс формулаларына анықтама беріліп, келесі минималды беттердің мысалдары келтіріледі: Эннепер беті (Сурет 1), геликоид (Сурет 2) және катеноид (Сурет 3).

Үшөлшемді кеңістіктегі беттердің формулалары

Математикалық физикада ең маңызды дербес туындылы дифференциалдық теңдеу – ол декарттық координата жүйесінде берілген келесі Лаплас теңдеуі [26, б. 179] болып табылады:

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0.$$

Анықтама 1. Егер нақты мәнді $f(x, y)$ функциясының екінші ретті туындылары үзіліссіз және осы функцияның анықталу облысының әрбір нүктесі Лаплас теңдеуін қанағаттандырса, онда функция *гармоникалық* деп аталады.

Анықтама 2. Егер $r: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r = (x^1, x^2, x^3)$ бетінің орташа қисықтығы нөлге тең болса

$$H = 0,$$

онда бет *минималды* деп аталады.

Минималды бет пен гармоникалық функциялар арасындағы қызықты байланысты изотермалдық координаталар [48, б. 144] көрсетеді.

Анықтама 3. Егер $E = G$, $F = 0$, яғни,

$$(r_u, r_u) = (r_v, r_v),$$

болса, онда $r(u, v)$ параметризациясы - *изотермалдық* [26, б. 181] деп аталады және беттің сызықты элементі келесі түрде жазылады:

$$ds^2 = e^{2\alpha}(dx^2 + dy^2) = e^{2\alpha}dzd\bar{z}.$$

Гаусстық қисықтық формулаларынан [26, б. 124] келесі теңдіктерді аламыз:

$$r_{uu} = \frac{E_u}{2E}r_u - \frac{E_v}{2G}r_v + lu^1,$$

$$r_{uv} = \frac{E_v}{2E}r_u + \frac{G_u}{2G}r_v + mu^2,$$

$$r_{vv} = -\frac{G_u}{2E}r_u + \frac{G_v}{2G}r_v + nu^3,$$

мұндағы E, F, G және l, m, n - сәйкесінше, бірінші және екінші квадраттық формалардың коэффициенттері, ал $U = (u^1, u^2, u^3)$ - бірлік нормал вектор.

Теорема 4 [26, б. 181]. Егер $r(u, v)$ – изотермалдық параметризация болса, онда

$$\Delta r = r_{uu} + r_{vv} = (2EH)U,$$

мұндағы $U = (u^1, 0, u^3)$.

Дәлелі. $E = G$ және $F = 0$ болғандықтан,

$$r_{uu} + r_{vv} = \left(\frac{E_u}{2E}r_u - \frac{E_v}{2G}r_v + lu^1\right) + \left(-\frac{G_u}{2E}r_u + \frac{G_v}{2G}r_v + nu^3\right) =$$

$$= \frac{E_u}{2E}r_u - \frac{E_u}{2E}r_u - \frac{E_v}{2G}r_v + \frac{E_v}{2G}r_v + lu^1 + nu^3 = (l + n)U.$$

$E = G$ және $F = 0$ болғанда, орташа қисықтық формулаларынан келесі теңдіктер шығады:

$$H = \frac{El + En}{2E^2} = \frac{l + n}{2E},$$

$$r_{uu} + r_{vv} = (2EH)U.$$

Салдары 1 [26, б. 182]. Егер x^1, x^2 және x^3 берілген гармоникалық функциялар болса, онда $r = (x^1, x^2, x^3)$ координаталары изотермалдық болатын бет минималды бет болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелі. Теорема 4-ден шығады.

r минималды беті $r(u, v)$ изотермалдық координаталармен анықталсын.
 $z = u + iv$ арқылы комплекс координаталарды белгілейік және

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right).$$

$$r(z, \bar{z}) = (x^1(z, \bar{z}), x^2(z, \bar{z}), x^3(z, \bar{z})),$$

мұндағы $x^j(z, \bar{z})$ - комплекс айнымалылы нақты мәнді функциялар $j = 1, 2, 3$.

Лемма 4 [28, б. 112]. Егер $\varphi: D \rightarrow \mathbb{C}^3$ - келесі шарттар орындалатындай вектор-функция болса:

$$\begin{aligned} & 1) \varphi - \text{голоморфты функция;} \\ & 2) \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0; \end{aligned} \quad (1.15)$$

онда изотермалдық координаталар үшін

$$\varphi = \frac{\partial r}{\partial z} = (x_z^1, x_z^2, x_z^3)$$

болатын $r: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ минималды беті табылады.

Дәлелі. $r(u, v)$ координаталарының изотермалдығынан

$$\begin{aligned} & \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = \\ & = \frac{1}{4} \left(\sum_{j=1}^3 (x_u^j)^2 - \sum_{j=1}^3 (x_v^j)^2 - 2i \sum_{j=1}^3 x_u^j x_v^j \right) = \\ & = \frac{1}{4} (|r_u|^2 - |r_v|^2 - 2i(r_u, r_v)) = \frac{1}{4} (E - G - 2iF) = 0 \end{aligned}$$

шығады.

r - изотермалдық бет болғандықтан,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial r}{\partial z} \right) = \frac{1}{4} \Delta r = 0.$$

Сонымен қатар, $\varphi = \frac{\partial r}{\partial z}$ - голоморфты функция. Соңғы нәтижеден x^j функциялары гармоникалық функциялар екендігі шығады, себебі φ_j -

гармоникалық функциялар $j = 1, 2, 3$. Яғни, r – минималды бет болып табылады.

Салдары 2 [26, б. 188-189].

$$x^j(z, \bar{z}) = C_j + 2\operatorname{Re} \int \varphi_j dz, \quad (1.16)$$

$j = 1, 2, 3$.

Дәлелі. $z = u + iv$, $dz = du + idv$ болғандықтан,

$$\varphi_j dz = \frac{1}{2} [(x_u^j - ix_v^j)(du + idv)] = \frac{1}{2} [x_u^j du + x_v^j dv + i(x_u^j dv - x_v^j du)],$$

$$\bar{\varphi}_j d\bar{z} = \frac{1}{2} [(x_u^j + ix_v^j)(du - idv)] = \frac{1}{2} [x_u^j du + x_v^j dv - i(x_u^j dv - x_v^j du)].$$

Соңғы теңдіктерден келесі нәтижелерді аламыз:

$$dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial z} dz + \frac{\partial x^j}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = \varphi_j dz + \bar{\varphi}_j d\bar{z} = 2\operatorname{Re} \varphi_j dz.$$

Минималды беттерді құрастырудағы мәселе – (1.15) теңдігі орындалатын $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ функцияларын табу. Ал (1.15) теңдігінің жалпы шешімі $\psi_1, \bar{\psi}_2$ қандайда голоморфты функциялары арқылы келесі түрде ұсынылады:

$$\varphi_1 = \frac{i}{2} (\psi_1^2 + \bar{\psi}_2^2), \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} (\bar{\psi}_2^2 - \psi_1^2), \quad \varphi_3 = \psi_1 \bar{\psi}_2 \quad (1.17)$$

Теорема 5 [28, б.113]. Егер D жиынында $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$ нөлдік емес мәндер үшін $\psi_1, \bar{\psi}_2$: $D \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфты функциялары болса, онда

$$x^1(P) = \frac{i}{2} \int_{P_0}^P \left((\psi_1^2 + \bar{\psi}_2^2) dz - (\bar{\psi}_1^2 + \psi_2^2) d\bar{z} \right) + x^1(P_0),$$

$$x^2(P) = \frac{1}{2} \int_{P_0}^P \left((\bar{\psi}_2^2 - \psi_1^2) dz + (\psi_2^2 - \bar{\psi}_1^2) d\bar{z} \right) + x^2(P_0), \quad (1.18)$$

$$x^3(P) = \int_{P_0}^P (\psi_1 \bar{\psi}_2 dz + \bar{\psi}_1 \psi_2 d\bar{z}) + x^3(P_0),$$

формулалары минималды беттің \mathbb{R}^3 кеңістігіне енгізілуін көрсетеді, мұндағы $(x^1(P_0), x^2(P_0), x^3(P_0))$ – сол кеңістіктегі бастапқы нүктелер.

Дәлелі. φ голоморфтығы ψ_1 және $\bar{\psi}_2$ голоморфтығынан шығады. Сондықтан Лемма 4 бойынша, (1.18) формулалары $r = (x^1, x^2, x^3)$ изотермиялық координатасы арқылы $r: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ минималды бетін анықтайды.

Минималды беттің кез келген маңайында $\frac{\partial r}{\partial z}$ туындысы изотермиялық параметризацияны анықтауы (1.17) формуладан шығады, яғни r беті (1.18) Вейерштрасс формулалары ([26, б. 188], [27, б. 114], [28, б. 113]) арқылы ұсынылады және келесі мысалдар аталған жұмыстарда кездеседі:

Мысал 8. [27, б. 118] (Эннепер беті)

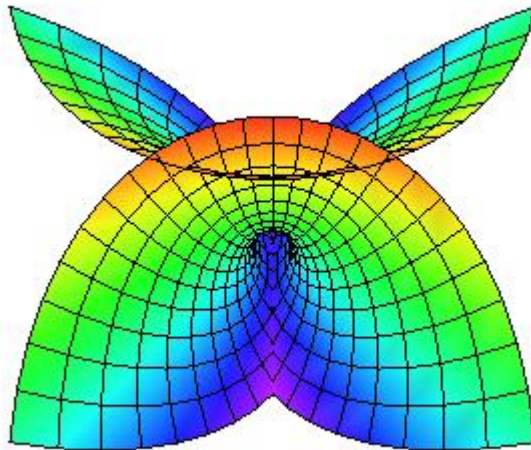
$$\psi_1 = z, \psi_2 = 1.$$

(1.18) Вейерштрасс формулалары бойынша беттің компоненттерін келесі түрде табамыз:

$$x^1(z, \bar{z}) = \frac{i}{2} \int_{(0,0)}^{(z,\bar{z})} (z^2 + 1)dz - (\bar{z}^2 + 1)d\bar{z} = \frac{y^3}{3} - x^2y - y,$$

$$x^2(z, \bar{z}) = \frac{1}{2} \int_{(0,0)}^{(z,\bar{z})} (1 - z^2)dz + (1 - \bar{z}^2)d\bar{z} = x - \frac{x^3}{3} + xy^2,$$

$$x^3(z, \bar{z}) = \int_{(0,0)}^{(z,\bar{z})} zdz + \bar{z}d\bar{z} = x^2 - y^2.$$



Сурет 1 - Эннепер беті

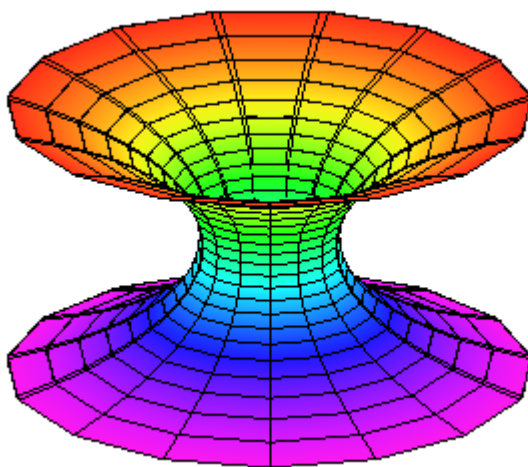
Мысал 9. [26, б. 190], [27, б. 117] (катеноид)

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{z}{2}}, \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\bar{z}}{2}}.$$

$$x^1(z, \bar{z}) = \frac{i}{2} \int_{(0,0)}^{(z,\bar{z})} \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2} dz - \frac{e^{\bar{z}} - e^{-\bar{z}}}{2} d\bar{z} \right) = \frac{i}{2} ((x + iy) - (x - iy)) \\ = -\operatorname{ch}x \operatorname{siny},$$

$$x^2(z, \bar{z}) = \frac{1}{2} \int_{(0,0)}^{(z,\bar{z})} \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2} dz + \frac{e^{\bar{z}} + e^{-\bar{z}}}{2} d\bar{z} \right) = \frac{1}{2} ((x + iy) + (x - iy)) \\ = \operatorname{ch}x \operatorname{cosy},$$

$$x^3(z, \bar{z}) = \int_{(0,0)}^{(z,\bar{z})} \left(\frac{1}{2} dz + \frac{1}{2} d\bar{z} \right) = x.$$



Сурет 2 - Катеноид

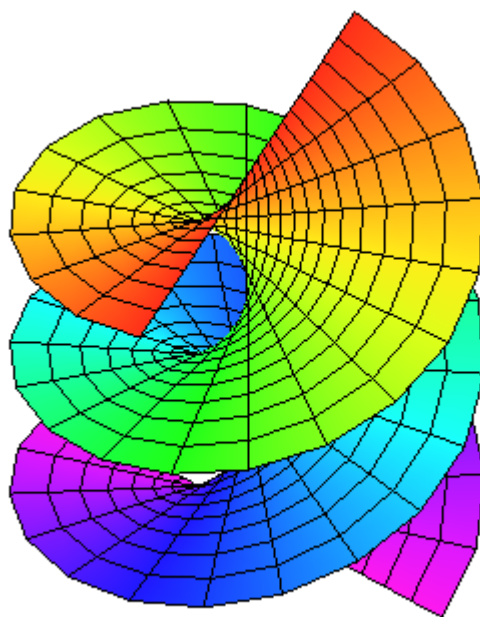
Мысал 10. [26, б. 190], [27, б. 117] (геликоид)

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{z}{2}}, \psi_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} e^{\frac{\bar{z}}{2}}.$$

$$x^1(z, \bar{z}) = \frac{i}{2} \int_{(0,0)}^{(z,\bar{z})} \left(\frac{e^{-z} - e^z}{2} dz - \frac{e^{-\bar{z}} - e^{\bar{z}}}{2} d\bar{z} \right) = -\frac{i}{2} ((x + iy) - (x - iy)) \\ = \operatorname{sh}x \operatorname{siny},$$

$$x^2(z, \bar{z}) = \frac{1}{2} \int_{(0,0)}^{(z,\bar{z})} \left(-\frac{e^z + e^{-z}}{2} dz - \frac{e^{\bar{z}} + e^{-\bar{z}}}{2} d\bar{z} \right) = -\frac{1}{2} ((x + iy) + (x - iy)) \\ = -\operatorname{sh}x \operatorname{cosy},$$

$$x^3(z, \bar{z}) = \int_{(0,0)}^{(z,\bar{z})} \left(-\frac{i}{2} dz + \frac{i}{2} d\bar{z} \right) = y.$$



Сурет 3 - Геликоид.

1.7 Минималды беттердің инверсиясы

Үшөлшемді кеңістіктің инверсиясына жалпы анықтама берейік.

\mathbb{R}^3 кеңістігінің инверсиясы [27, б. 367] деп 0-нүктесін (инверсия центрі) шексіз қашық нүктеге көшіретін келесі бейнелеуді атайды:

$$T: x \rightarrow -\frac{x}{|x|^2}, x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3.$$

Аталған бейнелеу кеңейтілген евклидтік $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} = S^3$ кеңістігін өз-өзіне конформды бейнелейді. Бұл бейнелеу \mathbb{R}^3 кеңістігінің конформды түрлендіруі деп аталады.

Сонымен қатар, басқа да төмендегідей бейнелеулер бар [27, б. 367]:

- 1) жылжыту: $x \rightarrow x + a, a \in \mathbb{R}^n$;
- 2) бұрылу: $x \rightarrow Ax, A \in SO(n)$;
- 3) дилатация (созылу): $x \rightarrow \lambda x, \lambda$ – нөлдік емес тұрақты;

Осы бейнелеу инверсиямен бірге S^n сферасын өз-өзіне конформды бейнелеуге жалғасады.

Минималды беттің геометриясын түсіну үшін $G(z)$ - Гаусс бейнелеуі және dh - жоғары дифференциалдың [30, б. 15] комплекс-аналитикалық қасиеттері қарастырылады.

Үшінші координатаның дифференциалы [30, б. 13], яғни

$$dx^3 = \text{Re}(dh)$$

жоғары дифференциал деп аталады. Анықтама бойынша,

$$dh = \frac{\partial}{\partial z}(\psi_1 \bar{\psi}_2) dz + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\psi_1 \bar{\psi}_2) d\bar{z} \quad (1.19)$$

Гаусс бейнелеуі (1.17) бойынша $G(z) = \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{1}{2}(r_u - ir_v)$ формуласы арқылы анықталады

$$G(z) = \left(\frac{i}{2}(\psi_1^2 + \bar{\psi}_2^2), \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \psi_1^2), \psi_1 \bar{\psi}_2 \right) \quad (1.20)$$

Бұл жерде Гаусс бейнелеуі ψ термині арқылы жазылған және келесі Дирак теңдеуінің шешімі де ψ - спинорлар [27, б. 539], [50, б. 72] деп аталады:

$$\mathcal{D}\psi = 0 \quad (1.21)$$

мұндағы $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} U & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{\partial \bar{z}} & U \end{pmatrix}$ – U нақты мәнді потенциалы арқылы Дирак операторын белгілейді.

Егер $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ спиноры Дирак теңдеуін қанағаттандырса, онда $\psi^* = \begin{pmatrix} -\bar{\psi}_2 \\ \bar{\psi}_1 \end{pmatrix}$ спиноры да Дирак теңдеуінің шешімі болады. Сондықтан ψ, ψ^* көмегімен Дирак теңдеуінің матрица мәнді шешімін құрастыра аламыз:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\bar{\psi}_2 \\ \psi_2 & \bar{\psi}_1 \end{pmatrix}.$$

Ψ түріндегі матрицалар қандайда бір кеңістіктен алынған.

Н төртөлшемді кеңістігі (жорамал кватерниондар) ([27, б. 160]) дегеніміз - $a, b \in \mathbb{C}$ үшін барлық $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ матрицаларынан құрастырылған кеңістік және $\text{span}\{\sigma_0, i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3\} = \mathbb{R}$,

мұндағы σ_0 - бірлік матрица, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Соңғы $\sigma_0, i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3$ матрицалары $su(2)$ Ли алгебрасы [27, б. 38] үшін базис құрайды.

$\Phi = \Psi^T$, Ψ – матрицалары H ([27, б. 160]) кеңістігінде берілген. Осы кеңістіктегі Φ, Ψ матрицалары көмегімен келесі матрица түрінде 1-форма ([7, б. 5], [10, б. 5]) құрастырылады:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(\Phi, \Psi) = & -\frac{i}{2}(\Phi\Psi + \Phi\sigma_3\Psi)dz + \frac{i}{2}(\Phi\Psi - \Phi\sigma_3\Psi)d\bar{z} + \\ & + [i((2\Phi_{z\bar{z}} - \Phi_{zz} - \Phi_{\bar{z}\bar{z}})\sigma_3\Psi + \Phi\sigma_3(2\Psi_{z\bar{z}} - \Psi_{zz} - \Psi_{\bar{z}\bar{z}})) + \\ & + (\Phi_z - \Phi_{\bar{z}})\sigma_3(\Psi_z - \Psi_{\bar{z}}) - 2U((\Phi_z - \Phi_{\bar{z}})\sigma_2\Psi - \Phi\sigma_2(\Psi_z - \Psi_{\bar{z}})) + \\ & + \Phi \begin{pmatrix} iU^2 + 3iV & -i(U_z + U_{\bar{z}}) \\ -i(U_z + U_{\bar{z}}) & -iU^2 + 3i\bar{V} \end{pmatrix} \Psi] dt \end{aligned} \quad (1.22)$$

мұндағы U, V - Дирак операторының потенциалдары.

Лемма ([7, б. 5], [27, б. 291]). $\tilde{\omega}$ – матрица түріндегі 1-формасы тұйық болып табылады, яғни

$$d\tilde{\omega} = 0.$$

Минималды бетті R^3 кеңістігіне *енгізу* (1.18) сияқты, матрица арқылы да *енгізуге* [10, б. 7] болады. Ол үшін келесі матрица түрінде функция қарастырылады:

$$S(\Phi, \Psi) = \Gamma \int_0^z -\frac{i}{2}(\Phi\Psi + \Phi\sigma_3\Psi)dz + \frac{i}{2}(\Phi\Psi - \Phi\sigma_3\Psi)d\bar{z} \quad (1.23)$$

мұндағы $\Gamma = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Минималды беттер (1.18) Вейерштрасс формулалары арқылы берілген. Ал \mathbb{R}^3 үшөлшемді кеңістігі

$$x = (x^1, x^2, x^3) \rightarrow \begin{pmatrix} ix^3 & -x^1 - ix^2 \\ x^1 - ix^2 & -ix^3 \end{pmatrix}$$

бейнелеуі арқылы $su(2)$ Ли алгебрасымен сәйкестендіріледі.

Сонымен қатар, [8, б. 11] жұмысында келесі тұжырым дәлелденген:

Тұжырым. Вейерштрасс формулалары арқылы Ψ спинорларымен анықталған (1.23) минималды беті $su(2) = R^3$ кеңістігіне енгізіледі.

$su(2)$ Ли алгебрасында анықталған $S(\Phi, \Psi)$ матрица түріндегі функцияны

$$S(\Phi, \Psi) = \begin{pmatrix} ix^3 & -x^1 - ix^2 \\ x^1 - ix^2 & -ix^3 \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

Вейерштрасс формулалары арқылы өрнектеу [10, б. 7] жұмысында енгізілген.

Келесі бөлімде сызықты емес мВН теңдеуін шығаруға қандайда түрлендіруді (Мутар түрлендіруі) енгізу үшін минималды бетті (1.24) матрица түрінде сипаттау қолданылады. Сонымен қатар, минималды беттің инверсиясын анықтау үшін Гаусс бейнелеуі мен жоғары дифференциалға мысалдар келтіріледі.

2 ИНВЕРСИЯЛАНҒАН МИНИМАЛДЫ БЕТТЕР ҮШІН ДЕФОРМАЦИЯЛАР

Модификацияланған Веселов-Новиков (мВН) теңдеуі [4, б. 309] жұмысында енгізілген. Осы теңдеудің көмегімен R^3 кеңістігінде минималды беттердің «деформациясы» ұғымы [6, б. 13] жұмысында келтірілген.

мВН теңдеуінің нақты шешімі Мутар түрлендіруінің [7, б. 6], [49, б. 141] көмегімен табылады. Осы бөлімде Мутар түрлендіруі матрица түрінде сипатталған минималды беттер үшін қолданылады. Эннепер беттері, катеноид және геликоид сияқты минималды беттердің инверсияларын анықтау үшін Гаусс бейнелеуі [30, б. 11] мен жоғары дифференциалға [30, б. 13] мысалдар келтіріледі. Сонымен қатар, аталған минималды беттердің инверсияларына талдау жасау үшін мВН теңдеуінің нақты шешімдері ізделініп табылады, ал бұл шешімдер инверсияланған минималды беттер үшін солитонды деформацияларды зерттеуге көмектеседі.

2.1 Модификацияланған Веселов-Новиков теңдеулері (мВН)

Екіөлшемді Дирак операторымен байланысты интегралданатын теңдеу - [4, б. 309] жұмысында енгізілген келесі модификацияланған Веселов-Новиков (мВН) теңдеуі болып есептеледі:

$$U_t = (U_{zzz} + 3U_z V + \frac{3}{2} UV_z) + (U_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} + 3U_{\bar{z}} \bar{V} + \frac{3}{2} U \bar{V}_{\bar{z}}) \quad (2.1)$$

мұндағы $z=x+iy$ болатын $U(z, \bar{z}, t)$ – нақты мәнді, ал $V(z, \bar{z}, t)$ қандайда функциялары үшін

$$V_{\bar{z}} = (U^2)_z \quad (2.2)$$

шарты орындалады.

(2.1), (2.2) мВН теңдеуі келесі Манаковтың L , \mathcal{A} , \mathcal{B} үштігі арқылы өрнектеледі [31, б. 245]:

$$\mathcal{D}_t + [\mathcal{D}, \mathcal{A}] - \mathcal{B}\mathcal{D} = 0 \quad (2.3)$$

мұндағы \mathcal{D} – Дирак операторы және $[\mathcal{D}, \mathcal{A}] = \mathcal{D} \cdot \mathcal{A} - \mathcal{A} \cdot \mathcal{D}$ – операторлардың коммутаторы,

\mathcal{A} , \mathcal{B} - ([7, б. 3], [10, б. 2]) жұмыстарында енгізілген келесі дифференциалдық операторлар болып табылады:

$$\mathcal{A} = \partial^3 + \bar{\partial}^3 + 3 \begin{pmatrix} V & 0 \\ U_z & 0 \end{pmatrix} \partial + 3 \begin{pmatrix} 0 & -U_{\bar{z}} \\ 0 & \bar{V} \end{pmatrix} \bar{\partial} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} V_z & 2U\bar{V} \\ -2UV & \bar{V}_{\bar{z}} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = 3 \begin{pmatrix} -V & 0 \\ -2U_z & V \end{pmatrix} \partial + 3 \begin{pmatrix} \bar{V} & 2U_{\bar{z}} \\ 0 & -\bar{V} \end{pmatrix} \bar{\partial} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \bar{V}_{\bar{z}} - V_z & 2U_{\bar{z}\bar{z}} \\ -2U_{zz} & V_z - \bar{V}_{\bar{z}} \end{pmatrix}.$$

(2.1), (2.2) мВН теңдеуінің U, V шешімдері алдын ала белгілі болсын және Дирак теңдеуінің матрица мәнді шешімі $\Psi_0 = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\bar{\psi}_2 \\ \psi_2 & \bar{\psi}_1 \end{pmatrix}$ келесі операторлар жүйесін қанағаттандырады:

$$\begin{cases} \mathcal{D}\Psi_0 = 0 \\ \Psi_{0t} = \mathcal{A}\Psi_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Соңғы жүйе (2.3) Манаковтың $L, \mathcal{A}, \mathcal{B}$ үштігіне эквивалентті екені белгілі және $U = V = 0$ болғанда, \mathcal{B} нөлдік операторы ретінде алынған. Сонымен қатар, (2.4) жүйедегі $\Psi_{0t} = \mathcal{A}\Psi_0$ теңдеуі келесі Эйри ([42, б. 209], [51, б. 479]) типті теңдеулер жүйесі арқылы жазылады:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z^3}, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial \bar{z}^3} \quad (2.5)$$

Бұл теңдеулер жүйесінің шешімдері $\psi_1(z, \bar{z}, t), \psi_2(z, \bar{z}, t)$ деп белгіленеді.

$\psi_1(z, \bar{z}, t), \psi_2(z, \bar{z}, t)$ спинорлары (2.4) жүйедегі $U = V = 0$ болғанда, $\mathcal{D}\Psi_0 = 0$ Дирак теңдеуін де қанағаттандырады:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (2.6)$$

Ал ψ_1, ψ_2 арқылы анықталған минималды беттерді (2.5) жүйенің $t = 0$ бастапқы шарттары ретін қарастырамыз:

$$\psi_1(z, \bar{z}, 0) = \psi_1, \quad \psi_2(z, \bar{z}, 0) = \psi_2. \quad (2.7)$$

Теорема 6 ([14, б. 1]). Егер $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ голоморфты функциялар болса, онда (2.5), (2.6), (2.7) бастапқы есебінің жалпы шешімі

$$\tilde{\psi} = \psi + \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \frac{\partial^3 p_{i-1}}{\partial z^3} d\tau_{i-1}, \quad (2.8)$$

формулалары арқылы табылады,
мұндағы

$$\int_0^t \frac{\partial^3 p_{i-1}}{\partial z^3} d\tau_{i-1} = p_i, p_0 = \psi, i = 1, 2, \dots,$$

$$\tilde{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1(z, \bar{z}, t) \\ \psi_2(z, \bar{z}, t) \end{pmatrix}.$$

Дәлелі. (2.5), (2.6), (2.7) бастапқы есебінің шешімі біртіндеп жуықтау ([14, б. 3], [32, б. 8]) әдісімен табылады.

$$p_1 = \int_0^t \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} d\tau_0, p_2 = \int_0^t \frac{\partial^3}{\partial z^3} \left(\int_0^t \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} d\tau_0 \right) d\tau_1,$$

$$p_3 = \int_0^t \frac{\partial^3}{\partial z^3} \left(\int_0^t \frac{\partial^3}{\partial z^3} \left(\int_0^t \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} d\tau_0 \right) d\tau_1 \right) d\tau_2, \dots,$$

$$p_n = \int_0^t \frac{\partial^3}{\partial z^3} (p_{n-1}) d\tau_{n-1}.$$

Енді $e^{t \frac{\partial^3}{\partial z^3}}$ операторлық функциясының [27, б. 281] Тейлор қатарына жіктелуін қолдансақ,

$$\tilde{\psi} = e^{t \frac{\partial^3}{\partial z^3}} \psi = \psi + t \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} + \frac{t^2}{2} \frac{\partial^3}{\partial z^3} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} \right) + \dots$$

Соңғы теңдіктен

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} &= \psi + \int_0^t \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} d\tau_0 + \int_0^t \frac{\partial^3}{\partial z^3} \left(\int_0^t \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} d\tau_0 \right) d\tau_1 + \dots = \\ &= \psi + \int_0^t \frac{\partial^3 p_0}{\partial z^3} d\tau_0 + \int_0^t \frac{\partial^3 p_1}{\partial z^3} d\tau_1 + \dots \end{aligned}$$

(2.5), (2.6), (2.7) бастапқы есебінің (2.8) жалпы шешімін аламыз.

Келесі мысалдарда келтірілген беттер [27, б. 117-118] жұмысында берілген, ал инверсияланған минималды беттер [14, б. 3] жұмысында табылған:

Мысал 11 (жоғарғы ретті Эннепер беті).

$$(\psi_1, \psi_2) = (z^n, 1),$$

$$\psi_1(z, \bar{z}, t) = z^n + n(n-1)(n-2)z^{n-3}t + n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-5)z^{n-6} \frac{t^2}{2!} +$$

$$+n(n-1)\cdots(n-8)z^{n-9}\frac{t^3}{3!}+\dots,$$

$$\psi_2(z, \bar{z}, t) = 1.$$

Мысал 12 (катеноид).

$$\psi_1 = \frac{e^{-\frac{z}{2}}}{\sqrt{2}}, \psi_2 = \frac{e^{\frac{\bar{z}}{2}}}{\sqrt{2}},$$

$$\tilde{\psi}: \psi_1(z, \bar{z}, t) = \frac{e^{-\frac{z}{2} - \frac{t}{8}}}{\sqrt{2}}, \psi_2(z, \bar{z}, t) = \frac{e^{\frac{\bar{z}}{2} + \frac{t}{8}}}{\sqrt{2}}.$$

Мысал 13 (геликоид).

$$\psi_1 = \frac{e^{-\frac{z}{2}}}{\sqrt{2}}, \psi_2 = \frac{ie^{\frac{\bar{z}}{2}}}{\sqrt{2}},$$

$$\tilde{\psi}: \psi_1(z, \bar{z}, t) = \frac{e^{-\frac{z}{2} - \frac{t}{8}}}{\sqrt{2}}, \psi_2(z, \bar{z}, t) = i \frac{e^{\frac{\bar{z}}{2} + \frac{t}{8}}}{\sqrt{2}}.$$

Инверсияланған минималды беттер $\psi_1(z, \bar{z}, t), \psi_2(z, \bar{z}, t)$ жаңа спинорлары арқылы сипатталады. Ал 1.6., Теорема 4 бойынша спинорлардың *изотермалдық координаталары* [26, б. 181] сақталған.

Инверсияланған минималды беттердің деформациясын талдау үшін Мутар түрлендіруінің көмегімен Дирак теңдеуінің шешімі (мВН теңдеуінің шешімі) ізделініп табылады [5, б. 19].

Келесі мВН теңдеуінің шешімін табу үшін Мутар түрлендірулері кейде *Дарбу түрлендірулері* [7, б. 3] деп те аталады:

$$\tilde{U}_t = (\tilde{U}_{zzz} + 3\tilde{U}_z\tilde{V} + \frac{3}{2}\tilde{U}\tilde{V}_z) + (\tilde{U}_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} + 3\tilde{U}_{\bar{z}}\tilde{V} + \frac{3}{2}\tilde{U}\tilde{V}_{\bar{z}}) \quad (2.9)$$

$$\tilde{V}_{\bar{z}} = (\tilde{U}^2)_z \quad (2.10)$$

2.2 Мутар түрлендіруінің геометриясы

Солитонды деформациялар (2+1)-өлшемді модификацияланған Веселов-Новиков (жалпы интегралданатын дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер) теңдеуінің [4, б. 309] барлық қызықты қасиеттері мен ерекшеліктерін сипаттап жеткізеді. Бұл деформациялар минималды беттердің интегралданатын динамикасы [5, б. 20] ретінде қарастырылады.

$\psi_1, \bar{\psi}_2$: $D \rightarrow \mathbb{C}$ гармоникалық функциялар болсын.

$\psi_1, \bar{\psi}_2$ гармоникалық функцияларының уақыт бойынша динамикасын [5, б. 20] зерттеу үшін $\psi_1(z, \bar{z}, t), \psi_2(z, \bar{z}, t)$ - инверсияланған минималды беттерге талдау жасалады.

Алдыңғы (2.8) формуласы бойынша құрастырылған $\psi \rightarrow \tilde{\psi}$ бейнелеуіне сәйкес матрица түрінде сипатталған минималды беттер (1.24) $S \rightarrow \tilde{S}_t$ бейнелеуі арқылы құрастырылады [10, б. 8].

Енді Мутар түрлендіруінің геометриясын анықтау үшін келесі \tilde{S}_t матрица түріндегі инверсияланған минималды беттер қарастырылады:

$$\tilde{S}_t = \Gamma \cdot \int_0^z \tilde{\omega}(\Phi, \Psi), \quad (2.11)$$

мұндағы $\tilde{\omega}(\Phi, \Psi)$ матрица түріндегі 1-форма (1.22) және $\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, яғни,

$$\tilde{S}_t = \begin{pmatrix} ix^3 & -x^1 - ix^2 \\ x^1 - ix^2 & -ix^3 \end{pmatrix} - i \int_0^t \begin{pmatrix} l(z, \bar{z}, \tau) & \overline{k(z, \bar{z}, \tau)} \\ k(z, \bar{z}, \tau) & -l(z, \bar{z}, \tau) \end{pmatrix} d\tau, \quad (2.12)$$

мұндағы

$$k(z, \bar{z}, t) = \psi_{1,z}^2 - \psi_{2,\bar{z}}^2 - 2(\psi_1 \psi_{1,zz} - \psi_2 \psi_{2,\bar{z}\bar{z}})|_{(z,\bar{z},t)},$$

$$l(z, \bar{z}, t) = \psi_{1,z} \bar{\psi}_{2,z} + \bar{\psi}_{1,\bar{z}} \psi_{2,\bar{z}} - \psi_{1,zz} \bar{\psi}_2 - \psi_1 \bar{\psi}_{2,zz} - \bar{\psi}_{1,\bar{z}\bar{z}} \psi_2 - \bar{\psi}_1 \psi_{2,\bar{z}\bar{z}}|_{(z,\bar{z},t)}.$$

2-формулада t (уақытқа тәуелді) айнымалысына сәйкес

$$\int_0^t \begin{pmatrix} l(z, \bar{z}, \tau) & \overline{k(z, \bar{z}, \tau)} \\ k(z, \bar{z}, \tau) & -l(z, \bar{z}, \tau) \end{pmatrix} d\tau$$

өрнектері S минималды бетінің инверсиясын анықтайды.

\tilde{S}_t инверсияланған минималды беттер үшін *солитонды деформациялар* деп

(2.9), (2.10) модификацияланған Веселов-Новиков (мВН) теңдеуінің қандайда тривиалды емес \tilde{U}, \tilde{V} шешімдерінің сипаттамаларын атайды.

Дарбу түрлендіруінің теориясы мен минималды беттер теориясы арасындағы байланыс [49, б. 65] жұмысында қолданылады.

Егер $\psi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ минималды бет болса, онда оның инверсиясы $\tilde{\psi} = T \cdot \psi$. Сәйкесінше, S минималды бетінің инверсиясы

$$S^{-1}: x \rightarrow -\frac{x}{|x|^2},$$

бейнелеуі арқылы анықталады. Яғни, осы бейнелеу Мутар түрлендіруінің ережесіндегі (алдын ала белгілі шешімдер арқылы жаңа шешімдерін іздеп табу) нөлдік потенциал арқылы сипатталған S минималды бетті (бастапқы нүктелері берілген) қандайда $t = const$ уақыт бойынша динамикасы \tilde{U} потенциалы арқылы сипатталатын $x = y = 0$ нүктесінде анықталған \tilde{S}_t бетіне көшіреді.

Үшөлшемді кеңістікте минималды беттердің келесі негізгі голоморфты объектілері (1.19), (1.20) белгілі:

- $G(z)$ Гаусс бейнелеуі – стереографикалық проекцияларды таңдауға тәуелді;
- dh жоғары дифференциалы – берілген беттің бұралуына тәуелді.

Келесі мысалдарда берілген минималды беттер үшін олардың инверсиялары (1.18) бойынша ($\tilde{\psi}$ беттері үшін) Вейерштрасс формулалары, Гаусс бейнелеуі және жоғары дифференциал арқылы құрастырылады.

Мысал 14 (Эннепер беті).

$$\psi_1 = z, \psi_2 = 1,$$

$$\tilde{\psi} = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вейерштрасс формулалары бойынша берілген беттің келесі координаталарын интегралдар арқылы табамыз:

$$\begin{aligned} x^1(z, \bar{z}) &= \frac{i}{2} \int_{(0,0)}^{(z,\bar{z})} (z^2 + 1)dz - (\bar{z}^2 + 1)d\bar{z} = \frac{y^3}{3} - x^2y - y, \\ x^2(z, \bar{z}) &= \frac{1}{2} \int_{(0,0)}^{(z,\bar{z})} (1 - z^2)dz + (1 - \bar{z}^2)d\bar{z} - C = x - \frac{x^3}{3} + xy^2 - C, \quad (2.13) \\ x^3(z, \bar{z}) &= \int_{(0,0)}^{(z,\bar{z})} zdz + \bar{z}d\bar{z} = x^2 - y^2. \end{aligned}$$

бұл жердегі сызықты интеграл D анықталу облысында интегралдау жолынан тәуелсіз,

ал бастапқы нүктелері $x_0^1 = x_0^3 = 0, x_0^2 = C$ болатындай таңдап алынған, $C > 0$ – қандайда тұрақты болып есептеледі.

Гаусс бейнелеуі

$$G(z) = \left(\frac{i}{2}(z^2 + 1), \frac{1}{2}(1 - z^2), z \right)$$

Эннепер бетінің бастапқы нүктесін таңдаудан тәуелді болады.

Себебі, стереографикалық проекция – бірлік (жалғыз) сфераны комплекс жазықтыққа бейнелеу деген мағынаны білдіреді. Ал берілген мысалда, $\tilde{\psi}$ инверсияланған Эннепер беті $t = C$ уақыт бойынша $x = y = 0$ нүктесін шексіздікке (∞) көшіреді, сондықтан бірлік сфераның полюсын және осы сфераның басқа барлық нүктелерін қиятын түзу комплекс жазықтыққа параллель болады.

[10, б. 12] жұмысында ψ бастапқы Эннепер бетін $x^2 = x^2 - t$ екінші координаталық осьтің бойымен қатаң жылжыту арқылы мВН теңдеуінің бұзылушы шешімдері табылған.

Жоғары дифференциалы $dx^3 = dz$, сондықтан беттің бұралуы жоқ екендігін білдіреді.

Екінші ретті Эннепер беті үшін мВН теңдеуінің сингулярлы шешімдері [11, б. 83],[12, б. 28] жұмыстарында табылған.

Мысал 15 (катеноид).

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{z}{2}}, \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\bar{z}}{2}}.$$

$$\begin{aligned} x^1(z, \bar{z}) &= \frac{i}{2} \int_{(0,0)}^{(z,\bar{z})} \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2} dz - \frac{e^{\bar{z}} - e^{-\bar{z}}}{2} d\bar{z} \right) = -\text{chxsin}y, \\ x^2(z, \bar{z}) &= \frac{1}{2} \int_{(0,0)}^{(z,\bar{z})} \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2} dz + \frac{e^{\bar{z}} + e^{-\bar{z}}}{2} d\bar{z} \right) = \text{chxcos}y, \\ x^3(z, \bar{z}) &= \int_{(0,0)}^{(z,\bar{z})} \left(\frac{1}{2} dz + \frac{1}{2} d\bar{z} \right) = x. \end{aligned} \quad (2.14)$$

(2.5), (2.6), (2.7) бастапқы есебінің шешімі ретінде анықталған инверсияланған катеноидтың

$$\tilde{\psi}: \psi_1(z, \bar{z}, t) = \frac{e^{-\frac{z}{2} - \frac{t}{8}}}{\sqrt{2}}, \psi_2(z, \bar{z}, t) = \frac{e^{\frac{\bar{z}}{2} - \frac{t}{8}}}{\sqrt{2}},$$

Вейерштрасс формулалары (1.8) арқылы келесі координаталары табылады:

$$\begin{aligned}
x^1(z, \bar{z}) &= -\operatorname{ch}\left(x + \frac{t}{4}\right) \operatorname{siny}, \\
x^2(z, \bar{z}) &= \operatorname{ch}\left(x + \frac{t}{4}\right) \operatorname{cosy} - \operatorname{ch}\frac{t}{4} + 1, \\
x^3(z, \bar{z}) &= x.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

мұндағы бастапқы нүктелері әзірше $x_0^1 = x_0^2 = x_0^3 = 0$.

Гаусс бейнелеуі

$$G(z) = \left(\frac{i}{2} \operatorname{sh}z, \frac{1}{2} \operatorname{ch}z, \frac{1}{2}\right)$$

катеноидтың бастапқы нүктесін таңдаудан тәуелді болады.

Жоғары дифференциалы $dh = 0$, сондықтан беттің бұралуы жоқ екендігін білдіреді.

Бұл мысалда, стереографикалық проекция – бірлік сфераның әрбір нүктесін комплекс жазықтықтың барлық нүктесіне бейнелейді. Себебі, ψ бастапқы берілген катеноидты барлық $t = \operatorname{const}$ уақыты бойынша $x^2 = x^2 \pm t$ екінші координаталық осьтің бойымен тегіс жылжыту арқылы мВН теңдеуінің $\tilde{U}(x, y, t)$ регулярлы шешімдері табылған [34, б. 30].

Мысал 16 (геликоид).

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{z}{2}}, \psi_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} e^{\frac{\bar{z}}{2}}.$$

$$\begin{aligned}
x^1(z, \bar{z}) &= \frac{i}{2} \int_{(0,0)}^{(z,\bar{z})} \left(-\frac{e^z - e^{-z}}{2} dz + \frac{e^{\bar{z}} - e^{-\bar{z}}}{2} d\bar{z} \right) = \operatorname{sh}x \operatorname{siny}, \\
x^2(z, \bar{z}) &= \frac{1}{2} \int_{(0,0)}^{(z,\bar{z})} \left(-\frac{e^z + e^{-z}}{2} dz - \frac{e^{\bar{z}} + e^{-\bar{z}}}{2} d\bar{z} \right) = -\operatorname{sh}x \operatorname{cosy}, \\
x^3(z, \bar{z}) &= \int_{(0,0)}^{(z,\bar{z})} \left(-\frac{i}{2} dz + \frac{i}{2} d\bar{z} \right) = y.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

(2.5), (2.6), (2.7) бастапқы есебінің шешімі ретінде анықталған инверсияланған геликоидтың

$$\tilde{\psi}: \psi_1(z, \bar{z}, t) = \frac{e^{-\frac{z}{2} - \frac{t}{8}}}{\sqrt{2}}, \psi_2(z, \bar{z}, t) = i \frac{e^{\frac{\bar{z}}{2} + \frac{t}{8}}}{\sqrt{2}}$$

Вейерштрасс формулалары (1.18) арқылы келесі координаталары табылады:

$$x^1(z, \bar{z}) = \operatorname{sh}\left(x + \frac{t}{4}\right) \operatorname{siny},$$

$$\begin{aligned}x^2(z, \bar{z}) &= -\operatorname{sh}\left(x + \frac{t}{4}\right) \cos y, \\x^3(z, \bar{z}) &= y.\end{aligned}\tag{2.17}$$

мұндағы бастапқы нүктелері әзірше $x_0^1 = x_0^2 = x_0^3 = 0$.

Гаусс бейнелеуі

$$G(z) = -\left(\frac{i}{2} \operatorname{sh} z, \frac{1}{2} \operatorname{ch} z, \frac{i}{2}\right)$$

геликоидтың бастапқы нүктесін таңдаудан тәуелді болады.

Жоғары дифференциалы $dh = 0$, сондықтан беттің бұралуы жоқ екендігін білдіреді.

Геликоид үшін стереографикалық проекция – бірлік сфераның әрбір нүктесін комплекс жазықтықтың барлық нүктесіне бейнелейді. Себебі, ψ бастапқы берілген геликоидтің барлық $t = \operatorname{const}$ уақыты бойынша $x^2 = x^2 + \operatorname{const}$ екінші координаталық осьтің бойымен тегіс жылжыту арқылы мВН теңдеуінің $\tilde{U}(x, y, t)$ регулярлы шешімдері табылған. Бірақ $t = 0$ бастапқы уақытта геликоидты қатаң жылжыту арқылы оның солитонды деформациясы 2.4.3-бөлігінде анықталады.

Сонымен, Мутар түрлендіруінің геометриясы Теорема 6 - ға негізделген, ал келесі бөлікте осы Мутар түрлендіруінің нақты алгоритмі келтіріледі.

2.3 Мутар түрлендіруінің сызықты алгебрасы

Мутар түрлендіруінің сызықты алгебрасы ретінде [7, б. 3], [10, б. 4] жұмысында белгілі келесі алгоритм (Дарбу түрлендіруі) келтіріледі:

Теорема 7. $U(z, \bar{z}, t)$ потенциалдары (мВН теңдеулерінің шешімдері) арқылы

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{\partial \bar{z}} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} - \text{Дирак операторы берілген болсын. Егер}$$

$$\Psi_0(z, \bar{z}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\bar{\psi}_2 \\ \psi_2 & \bar{\psi}_1 \end{pmatrix} \text{ спинорлары (2.5), (2.6) бойынша келесі теңдеулер}$$

жүйесін $(U(z, \bar{z}, t) = 0$ болғанда) қанағаттандырса:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \bar{z}} = 0, \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z^3}, \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial \bar{z}^3},\tag{2.18}$$

онда

1. $K(\Psi_0)$ және $M(\Psi_0)$ матрицалары келесі түрде есептеледі:

$$K(\Psi_0) = \Psi_0 \tilde{S}^{-1}(\Psi_0^T, \Psi_0) \Gamma \Psi_0^T \Gamma^{-1}, \quad (2.19)$$

$$M(\Psi_0) = i\Gamma(\Psi_{0z} - \Psi_{0\bar{z}})\Psi_0^{-1}\Gamma^{-1}, \quad (2.20)$$

мұндағы \tilde{S}^{-1} - \tilde{S} (2.12) матрицасының кері матрицасы, $\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

2. (2.18) теңдеулер жүйесінің кез келген Ψ шешімдері үшін $\tilde{\Psi}$ жаңа функциялары да (2.18) теңдеулер жүйесінің шешімдері болып есептеледі және келесі түрде анықталады:

$$\tilde{\Psi} = \Psi - \Psi_0 \cdot \tilde{S}^{-1}(\Psi_0^T, \Psi_0) \cdot \tilde{S}(\Psi_0^T, \Psi), \quad (2.21)$$

Сонымен қатар,

$$\tilde{U} = ik_{12} \quad (2.22)$$

потенциалы арқылы \tilde{D} Дирак операторы, \tilde{U} және

$$\tilde{V} = \bar{k}_{11}^2 - 2(m_{21}k_{21} + \bar{m}_{11}\bar{k}_{11}) \quad (2.23)$$

потенциалдары келесі операторлық теңдеулер жүйесін қанағаттандырады:

$$\tilde{D}\tilde{\Psi} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t} = \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\Psi}, \quad (2.24)$$

мұндағы

$$\tilde{\mathcal{A}} = \frac{\partial^3}{\partial z^3} + \frac{\partial^3}{\partial \bar{z}^3} + 3 \begin{pmatrix} \tilde{V} & 0 \\ \tilde{U}_z & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^3}{\partial z^3} + 3 \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{U}_{\bar{z}} \\ 0 & \tilde{V} \end{pmatrix} \frac{\partial^3}{\partial \bar{z}^3} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \tilde{V}_z & 2\tilde{U}\tilde{V} \\ -2\tilde{U}\tilde{V} & \tilde{V}_{\bar{z}} \end{pmatrix}.$$

(2.24) жүйе Манаковтың ([31, б. б. 245]) $L, \mathcal{A}, \mathcal{B}$ (2.3) үштігіне эквивалентті болатындай етіп осы $\tilde{\mathcal{A}}$ матрицасы таңдап алынған және осы үштік мВН теңдеулерінің операторлық түрдегі жазылуы болып есептеледі.

3. \tilde{U} нақты мәнді функциясы және \tilde{V} функциясы мВН теңдеулерін қанағаттандырады.

2.4 Инверсияланған минималды беттер үшін солитонды деформациялар

\tilde{S} - инверсияланған минималды беттер үшін *солитонды деформациялар* деп – модификацияланған Веселов-Новиков (мВН) теңдеуінің (2.9), (2.10) қандайда тривиалды емес \tilde{U}, \tilde{V} шешімдерінің сипаттамаларын атайды. Ал \tilde{U}, \tilde{V} нақты шешімдерін табу үшін Мутар түрлендіруі (2.3., Теорема 7) қолданылады. Мутар

түрлендіруі бойынша Ψ қандайда минималды бетті енгіземіз, бұл бөлікте жоғарғы ретті Эннепер беттері, катеноид және геликоид сияқты минималды беттер (2.5), (2.6), (2.7) есебінің бастапқы шарттары ретінде енгізіледі.

2.4.1 Инверсияланған жоғарғы ретті Эннепер беттері үшін солитонды деформациялар

Вейерштрасс формулалары (1.18) арқылы әрбір $\psi_1, \bar{\psi}_2: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфты функциялар жұбына $\Sigma: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ минималды беті сәйкес қойылады. Мысалы, $\Sigma = (x^1, x^2, x^3)$ жоғарғы ретті Эннепер беттері келесі формулалармен беріледі [9, б. 4], [10, б. 3]:

$$x^1(z, \bar{z}) = \frac{i}{2} \int_{(0,0)}^{(z,\bar{z})} (\psi_1^2 + \bar{\psi}_2^2) dz - (\bar{\psi}_1^2 + \psi_2^2) d\bar{z} + x_0^1,$$

$$x^2(z, \bar{z}) = \frac{1}{2} \int_{(0,0)}^{(z,\bar{z})} (\bar{\psi}_2^2 - \psi_1^2) dz + (\psi_2^2 - \bar{\psi}_1^2) d\bar{z} + x_0^2, \quad (2.25)$$

$$x^3(z, \bar{z}) = \int_{(0,0)}^{(z,\bar{z})} \psi_1 \bar{\psi}_2 dz + \bar{\psi}_1 \psi_2 d\bar{z} + x_0^3,$$

бұл жерде бастапқы нүктелер $x_0^1 = -a, x_0^2 = b, x_0^3 = c$ тұрақтылары арқылы берілген.

Σ_t барлық инверсияланған Эннепер беттері үшін $n \geq 3$ болсын. (2.18) теңдеулер жүйесінің шешімі ретінде Σ_t беттері (2.1, Мысал 11 - де көрсетілген) келесі голоморфты функциялар арқылы анықталады:

$$\psi_1(z, \bar{z}, t) = z^n + n(n-1)(n-2)z^{n-3}t + n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-5)z^{n-6} \frac{t^2}{2!} +$$

$$+ n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-8)z^{n-9} \frac{t^3}{3!} + \dots, \quad (2.26)$$

$$\psi_2(z, \bar{z}, t) = 1. \quad (2.27)$$

Осы инверсияланған жоғарғы ретті Эннепер беттері келесі матрица [10, б. 7] түрінде жазылады:

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

мұндағы

$$\alpha = i \int_0^z \psi_1 \bar{\psi}_2 dz + \bar{\psi}_1 \psi_2 d\bar{z} - i \int_0^t l(z, \bar{z}, \tau) d\tau + 2ic,$$

$$\beta = i \int_0^z \psi_1^2 dz - i \int_0^t k(z, \bar{z}, \tau) d\tau - 2(a + bi),$$

$$k(z, \bar{z}, t) = \psi_{1,z}^2 - \psi_{2,\bar{z}}^2 - 2(\psi_1 \psi_{1,zz} - \psi_2 \psi_{2,\bar{z}\bar{z}})|_{(z,\bar{z},t)}, \quad (2.29)$$

$$l(z, \bar{z}, t) = \psi_{1,z} \bar{\psi}_{2,z} + \bar{\psi}_{1,\bar{z}} \psi_{2,\bar{z}} - \psi_{1,zz} \bar{\psi}_2 - \psi_1 \bar{\psi}_{2,zz} - \bar{\psi}_{1,\bar{z}\bar{z}} \psi_2 - \bar{\psi}_1 \psi_{2,\bar{z}\bar{z}}|_{(z,\bar{z},t)} \quad (2.30)$$

Мутар түрлендіруінің алгоритмі бойынша, $K(\Psi_0)$ және $M(\Psi_0)$ матрицалары келесі түрде есептеледі:

$$K(\Psi_0) = \Psi_0 \tilde{S}^{-1} (\Psi_0^T, \Psi_0) \Gamma \Psi_0^T \Gamma^{-1},$$

$$M(\Psi_0) = i \Gamma (\Psi_{0z} - \Psi_{0\bar{z}}) \Psi_0^{-1} \Gamma^{-1},$$

мұндағы Ψ_0 - жоғарғы ретті Эннепер беттері, \tilde{S} матрицасы – Σ_t инверсияланған жоғарғы ретті Эннепер беттерінің t (уақытқа тәуелді) айнымалысына сәйкес $\psi_1(z, \bar{z}, t), \psi_2(z, \bar{z}, t)$ спинорлары (2.29), (2.30) компоненттеріне қойылып, (2.28) формуласы арқылы табылған және \tilde{S}^{-1} - кері матрицасы.

Сонымен,

$$\mathcal{D}\psi = 0 \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}\tilde{\psi} = 0$$

Мутар түрлендіруі арқылы $\tilde{\mathcal{D}}$ Дирак операторының $\tilde{U}(z, \bar{z}, t)$ потенциалы (2.22) бойынша келесі түрде табылады:

$$\tilde{U} = -i \frac{|z^n + \int_0^t \partial^3 z^n d\tau_1 + \dots|^2 \bar{\alpha} - (\bar{z}^n + \int_0^t \bar{\partial}^3 \bar{z}^n d\tau_1 + \dots) \bar{\beta}}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} -$$

$$-i \frac{(z^n + \int_0^t \partial^3 z^n d\tau_1 + \dots) \beta + \alpha}{|\alpha|^2 + |\beta|^2}. \quad (2.31)$$

\tilde{U} нақты мәнді функциясы және (2.23) бойынша \tilde{V} функциясы Мутар түрлендіруі (2.3., Теорема 7) бойынша мВН теңдеулерін қанағаттандырады.

Теорема 8 [14, б. 1].

Егер жеткілікті үлкен a, b, c тұрақтылары үшін $a \gg 1, b \gg 1, c \gg 1$ болатындай

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow x = y = 0 \quad (2.32)$$

шарты орындалса, онда $\Sigma_{a,b,c}$ – барлық инверсияланған жоғарғы ретті Эннепер беттерінің солитонды деформациясын сипаттайтын \tilde{U} потенциалы регулярлы болады және $|a| + |b| + |c| \neq 0$ үшін Гаусс қисықтығы $K < 0$ болады.

Сонымен қатар, Σ жоғарғы ретті Эннепер беттерінің a, b, c параметрлері арқылы берілген түзудің бойымен параллель көшіру нәтижесінде $\tilde{S}_{a,b,c}$ ($n \geq 3$) инверсияланған жоғарғы ретті Эннепер беттері қандайда ершік беттерге тегіс деформацияланады.

Дәлелі. $n \geq 3$ үшін $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow x = y = 0$ болатынын дәлелдейік.

$$\begin{aligned} |\beta|^2 = \beta \bar{\beta} &= \int_0^z \psi_1^2 dz \int_0^{\bar{z}} \bar{\psi}_1^2 d\bar{z} + \int_0^t k d\tau \int_0^t \bar{k} d\tau - \int_0^z \psi_1^2 dz \int_0^t \overline{k(z, \bar{z}, \tau)} d\tau - \\ &- \int_0^t k(z, \bar{z}, \tau) d\tau \int_0^{\bar{z}} \bar{\psi}_1^2 d\bar{z} - 2i(a - bi) \left(\int_0^z \psi_1^2 dz - \int_0^t k(z, \bar{z}, \tau) d\tau \right) - \\ &- 2i(a + bi) \left(\int_0^t \overline{k(z, \bar{z}, \tau)} d\tau - \int_0^{\bar{z}} \bar{\psi}_1^2 d\bar{z} \right) + 4(a^2 + b^2), \end{aligned}$$

мұндағы ψ_1 (2.26) қандайда полиномы арқылы берілген және $k(z, \bar{z}, t)$ келесі түрде табылады:

$$\begin{aligned} k(z, \bar{z}, t) &= (nz^{n-1} + n(n-1)(n-2)(n-3)z^{n-4}t \dots)^2 - \\ &- 2\psi_1(n(n-1)z^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)z^{n-5}t). \end{aligned}$$

$x = y = 0$ үшін $|\beta|^2 = 4(a^2 + b^2)$ екені шығады және сәйкесінше, $|\alpha|^2 = 4c^2$. Бұл жерде (2.32) теңдікті көрсеттік.

Егер алдын ала анықталған түзудің бойымен қозғалмалы жоғарғы ретті Эннепер беттері үшін $a \gg 1, b \gg 1, c \gg 1$ үлкен параметрлері берілсе, онда $\tilde{S}_{a,b,c}$ беттерінің солитонды деформациясы [6, б. 11], [33, б. 43] глобалды түрде анықталады, яғни, барлық инверсияланған жоғарғы ретті Эннепер беттері

қандайда ершік беттерге деформацияланады. Осы беттерді сипаттайтын \tilde{U} потенциалдары теореманың тұжырымы бойынша регулярлы болады.

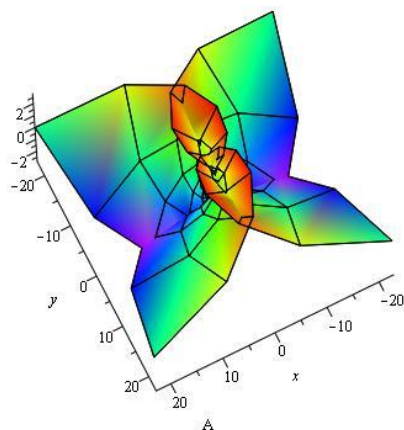
Жалпы беттердің регулярлығы шартынан $x = 0, y = 0$ нүктесінде инверсияланған минималды беттердің регулярлығы [14, б. 4] шығады:

$$\tilde{U}_x \neq 0, \tilde{U}_y \neq 0, \tilde{U}_t \neq 0.$$

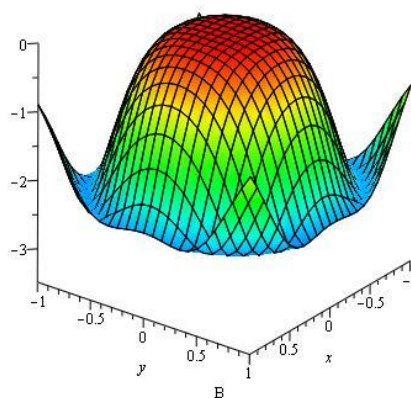
Солитонды деформация барлық инверсияланған минималды беттерді гиперболалық беттерге (дербес жағдайда, ершік беттерге) көшіргендіктен, жоғарғы ретті Эннепер беттерінің (ерекше нүктелерінен өзге $x = y = 0$ үшін) Гаусс қисықтығы теріс таңбада болады.

Осы ершік бет Сурет 4 (В), Сурет 5 (D) көрсетілген.

Теорема 8 дәлелденді.

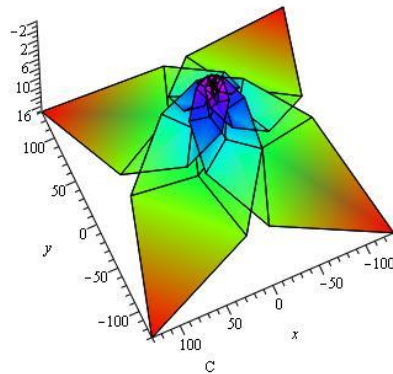


А. $x \in [-1.2, 1.2], y \in [-1.2, 1.2]$ интервалында берілген бесінші ретті Эннепер беті

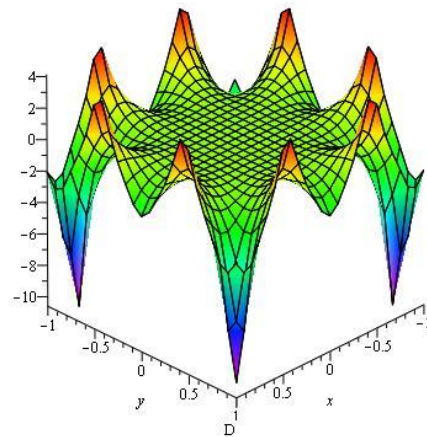


В. Инверсияланған бесінші ретті Эннепер бетінің координата басында, нөлдiк емес a, b, c параметрлері үшін солитонды деформациясы

Сурет 4 - Инверсияланған бесінші ретті Эннепер бетінің солитонды деформациясын сипаттайтын \tilde{U} потенциалының регулярлығы



С. $x \in [-1.2, 1.2], y \in [-1.2, 1.2]$ интервалында берілген жетінші ретті Эннепер беті



Д. Инверсияланған жетінші ретті Эннепер бетінің координата басында, $a = b = c = 0$ параметрлері үшін солитонды деформациясы

Сурет 5 - Инверсияланған жетінші ретті Эннепер бетінің солитонды деформациясын сипаттайтын \tilde{U} потенциалының регулярлығы

Сонымен, Теорема 8-дің негізгі нәтижесінде инверсияланған жоғарғы ретті Эннепер беттерінің солитонды деформациясы a, b, c параметрлеріне тәуелді (яғни, $x_0^1 = -a, x_0^2 = b, x_0^3 = c$ бастапқы нүктелерді таңдауға тәуелді) $\Sigma = (x^1, x^2, x^3)$ беттерін параллель көшіру арқылы табылған.

Модификацияланған Веселов-Новиков (мВН) теңдеуінің (инверсияланған Эннепер беттері сипатталатын) нақты шешімдерінің физикалық мағынасы ретінде [20, б. 2] жұмысында көрсетілген сызықты емес аралас Шредингер теңдеулер жұбының (әртүрлі параметрлерге тәуелді) солитондарын қарастыруға болады.

Салдары 1

$n = 4, 5, 7, \dots$ (үшеселі реттен басқа) ретті барлық Σ беттерін сипаттайтын \tilde{U} потенциалдары регулярлы болады.

Дәлелі. 1-салдардың дәлелдеуі Теорема 8 - дің дербес жағдайынан шығатыны айқын. Алдағы 3.1.3, 3.1.4 бөліктерінде төртінші және бесінші ретті Эннепер беттері үшін солитонды деформациялар (Сурет 11, Сурет 12) көрсетіледі.

Салдары 2

Кез келген $n \in N$ ретті $a = b = c = 0$ шарттары орындалатын Σ беттерін сипаттайтын \tilde{U} потенциалдарының x, y айнымалыларына қатысты $(n - 1)$ -ретке дейін дербес туындылары $x = y = 0$ оқшауланған нүктеде сингулярлы мәндер қабылдайды және келесі ақырлы шектері орындалады:

$$\lim_{r \rightarrow 0, \varphi = \text{const}} \left(\frac{\partial^{2j-1}}{\partial x^{2j-1}} + \frac{\partial^{2j-1}}{\partial y^{2j-1}} \right) \tilde{U}(x, y, 0) = \sum_{s=1}^{n_1} (a_s \cos 2s\varphi + b_s \sin 2s\varphi), \quad (2.33)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0, \varphi = \text{const}} \left(\frac{\partial^{2j}}{\partial x^{2j}} + \frac{\partial^{2j}}{\partial y^{2j}} \right) \tilde{U}(x, y, 0) = \sum_{s=1}^{n_2} c_s \cos 2s\varphi, \quad (2.34)$$

мұндағы $n_1 = 2j$, $j = 1, 2, \dots$, және $n_2 = 2j + 1$, $j = 0, 1, \dots$, және a_s, b_s – нөлдік емес, c_s – қандайда тұрақтылар ($s \in N$).

Дәлелі. Теорема 8-дің салдары 2-ні дәлелдеу үшін (2.31) формула арқылы табылған потенциалдан екі айнымалыға қатысты дербес туындыларын аламыз және полярлық координаттарға көшіп, $r \rightarrow 0, \varphi = \text{const}$ болғанда шектерін келесі түрде есептейміз:

$$j = 1: n_1 = 2, \quad \lim_{r \rightarrow 0, \varphi = \text{const}} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{U}(x, y, 0) = -\frac{8}{3} \cos 2\varphi + \frac{4}{3} \cos 4\varphi,$$

$$\lim_{r \rightarrow 0, \varphi = \text{const}} \frac{\partial}{\partial y} \tilde{U}(x, y, 0) = \frac{8}{3} \sin 2\varphi + \frac{4}{3} \sin 4\varphi,$$

$$n_2 = 3, \quad \lim_{r \rightarrow 0, \varphi = \text{const}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{U}(x, y, 0) = -9 \cos 2\varphi + 9 \cos 4\varphi - 3 \cos 6\varphi,$$

$$\lim_{r \rightarrow 0, \varphi = \text{const}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{U}(x, y, 0) = 9 \cos 2\varphi + 9 \cos 4\varphi + 3 \cos 6\varphi;$$

$$j = 2: n_1 = 4, \quad \lim_{r \rightarrow 0, \varphi = \text{const}} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \tilde{U}(x, y, 0) = -\frac{192}{5} \cos 2\varphi + \frac{288}{5} \cos 4\varphi - \frac{192}{5} \cos 6\varphi + \frac{48}{5} \cos 8\varphi,$$

$$\lim_{r \rightarrow 0, \varphi = \text{const}} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \tilde{U}(x, y, 0) = -\frac{192}{5} \sin 2\varphi - \frac{288}{5} \sin 4\varphi - \frac{192}{5} \sin 6\varphi - \frac{48}{5} \sin 8\varphi,$$

$$n_2 = 5, \quad \lim_{r \rightarrow 0, \varphi = \text{const}} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \tilde{U}(x, y, 0) = -200 \cos 2\varphi + 400 \cos 4\varphi - 400 \cos 6\varphi + 200 \cos 8\varphi - 40 \cos 10\varphi,$$

$$\lim_{r \rightarrow 0, \varphi = \text{const}} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \tilde{U}(x, y, 0) = -200 \cos 2\varphi - 400 \cos 4\varphi - 400 \cos 6\varphi - 200 \cos 8\varphi - 40 \cos 10\varphi;$$

$$j = 3: n_1 = 6, \lim_{r \rightarrow 0, \varphi = \text{const}} \frac{\partial^5}{\partial x^5} \tilde{U}(x, y, 0) = -\frac{8640}{7} \cos 2\varphi + \frac{21600}{7} \cos 4\varphi - \frac{28800}{7} \cos 6\varphi + \frac{21600}{7} \cos 8\varphi - \frac{8640}{7} \cos 10\varphi + \frac{1440}{7} \cos 12\varphi,$$

$$\lim_{r \rightarrow 0, \varphi = \text{const}} \frac{\partial^5}{\partial y^5} \tilde{U}(x, y, 0) = \frac{8640}{7} \sin 2\varphi + \frac{21600}{7} \sin 4\varphi + \frac{28800}{7} \sin 6\varphi + \frac{21600}{7} \sin 8\varphi + \frac{8640}{7} \sin 10\varphi + \frac{1440}{7} \sin 12\varphi,$$

т.с.с. есептеулерді жалғастырсақ, жоғарғы ретті Эннепер беттерінің жұп және тақ реттері үшін (2.33), (2.34) теңдіктері шығады.

Салдар 2 дәлелденді.

Қорытындылай келе, инверсияланған жоғарғы ретті Эннепер беттері үшін солитонды деформацияларды (Теорема 8 - дің Салдары 1, Салдары 2 нәтижелерін) келесі кестеде көрсетуге болады:

Кесте 1 - Инверсияланған жоғарғы ретті Эннепер беттері үшін потенциалдар

$n \in N$	$a = b = c = 0$	$a \gg 1, b \gg 1, c \gg 1$
3-еселі ретті	\tilde{U} потенциалы <i>сингулярлы</i> ¹	\tilde{U} потенциалдары регулярлы
4,5,7,8,10,... - ретті	\tilde{U} потенциалы регулярлы	
$n_1 = 2j$ - ретті, $j = 1, 2, \dots$	\tilde{U} потенциалының $(2j - 1)$ - ретті дербес туындылары сингулярлы ²	
$n_2 = 2j + 1$ - ретті, $j = 0, 1, \dots$	\tilde{U} потенциалының $(2j)$ - ретті дербес туындылары сингулярлы ³	
Ескерту: Инверсияланған үшінші ретті Эннепер беттері үшін солитонды деформациялар [35, б. 166] жұмысында табылған, ал 3-еселі ретті Эннепер беттері үшін солитонды деформациялар толық зерттелмеген.		

2.4.2 Инверсияланған катеноид үшін солитонды деформациялар

Катеноид бетінің инверсиясын анықтау үшін Вейерштрасс формулалары қолданылады. Диссертациялық жұмыстың бұл бөлігінде [34, б. 30] жұмысында алынған инверсияланған катеноид үшін солитонды деформациялар келтіріледі.

Инверсияланған катеноид

Егер $\psi: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ минималды бет болса, онда оның инверсиясы $\tilde{\psi} = T \cdot \psi$.

¹ [23, б. 161] нәтижесінде үшінші ретті Эннепер беті үшін \tilde{U} сингулярлы потенциалы ($t = 0$) табылған.

² $j = 1$ болғанда екінші ретті Эннепер беті үшін нәтиже [11, б. 84] жұмысында ($t = -\frac{c}{4}$) көрсетілген.

³ Бұл нәтиже $j = 0$ болғанда Эннепер беті үшін [10, б. 9] ($t = C$) жұмысында алынған.

Яғни, S минималды бетінің инверсиясы деп -

$$S^{-1}: x \rightarrow -\frac{x}{|x|^2},$$

бейнелеуін атайды, бұл инверсия $u^0 = (0,1,0)$ бастапқы нүктесі берілген (сипатталатын потенциалы 0-ге тең болатын) катеноидты $t = const$ уақыты бойынша, $x = y = 0$ нүктесінде (сипатталатын потенциалы \tilde{U} болатын) \tilde{S}_t бетіне көшіреді.

(2.5), (2.6), (2.7) бастапқы есебінің шешімі ретінде анықталған инверсияланған катеноидтың

$$\tilde{\psi}: \psi_1(z, \bar{z}, t) = \frac{e^{-\frac{z-t}{2}}}{\sqrt{2}}, \psi_2(z, \bar{z}, t) = \frac{e^{\frac{\bar{z}-t}{2}}}{\sqrt{2}},$$

Вейерштрасс формулалары (1.18) арқылы келесі координаталары табылатыны белгілі:

$$\begin{aligned} x^1(z, \bar{z}) &= -\operatorname{ch}\left(x + \frac{t}{4}\right) \sin y, \\ x^2(z, \bar{z}) &= \operatorname{ch}\left(x + \frac{t}{4}\right) \cos y - \operatorname{ch} \frac{t}{4} + 1, \\ x^3(z, \bar{z}) &= x. \end{aligned} \quad (2.35)$$

мұндағы бастапқы нүктелері әзірше $x_0^1 = x_0^2 = x_0^3 = 0$.

$\psi \rightarrow \tilde{\psi}$ бейнелеуіне сәйкес келесі беттер $S \rightarrow \tilde{S}_t$ арқылы құрастырылады [10, б. 8]:

$$S(x, y) = \begin{pmatrix} ix & -ie^{iy} \operatorname{ch} x \\ -ie^{-iy} \operatorname{ch} x & -ix \end{pmatrix},$$

мұндағы бастапқы нүктелері $x_0^1 = x_0^3 = 0, x_0^2 = 1$ орналасқан.

(2.12) формулаға (2.35) формулаларын апарып қойып, S бетінің деформациялық бөлігі келесі k, l арқылы табылатынын көреміз:

$$k = \frac{1}{4} e^{-iy} \operatorname{sh}\left(x + \frac{t}{4}\right), l = -\frac{3}{4}.$$

$t = const$ уақыты бойынша S бетінің келесі координаталары арқылы

$$\begin{aligned}
x^1(z, \bar{z}) &= -\operatorname{ch}\left(x + \frac{\operatorname{const}}{4}\right) \sin y, \\
x^2(z, \bar{z}) &= \operatorname{ch}\left(x + \frac{\operatorname{const}}{4}\right) \cos y, \\
x^3(z, \bar{z}) &= x + \frac{\operatorname{const}}{4},
\end{aligned} \tag{2.36}$$

(мұндағы бастапқы нүктелері $x_0^1 = 0, x_0^2 = \operatorname{ch} \frac{\operatorname{const}}{4}, x_0^3 = \frac{\operatorname{const}}{4}$),

$$\tilde{S}_t = \begin{pmatrix} i\left(x + \frac{3t}{4}\right) & -ie^{iy} \operatorname{ch}\left(x + \frac{t}{4}\right) \\ -ie^{-iy} \operatorname{ch}\left(x + \frac{t}{4}\right) & -i\left(x + \frac{3t}{4}\right) \end{pmatrix}$$

инверсияланған катеноид құрастырылады.

(2.3) формула арқылы берілген Манаковтың $L, \mathcal{A}, \mathcal{B}$ үштігі негізінен [7, б. 3],[8, б. 20] жұмыстарында

$$L = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & -U \\ U & \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix}$$

операторы терминінде

$$L_t + [L, A] - BL = 0,$$

арқылы жазылатын.

Дирак операторы $\mathcal{D} = L \cdot \Gamma$, мұндағы $\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ал \mathcal{A}, \mathcal{B} операторлары [8, б. 6], [31, б. 245] жұмыстарында келтірілген келесі формулалары арқылы алынған:

$$\mathcal{A} = -\Gamma A \Gamma, \mathcal{B} = \Gamma A \Gamma + A + B.$$

Егер U, V потенциалдары x, y айнымалыларына тәуелді болса, онда (2.1), (2.2) мВН теңдеулері келесі формада жазылады:

$$\begin{aligned}
U_t &= U_{xxx} - 3U_x U_{yy} + \frac{3}{2}U_x(V + \bar{V}) + \frac{3}{4}U(V_x + \bar{V}_x) + \frac{3i}{2}U_y(\bar{V} - V) + \\
&+ \frac{3i}{4}U(\bar{V}_y - V_y)
\end{aligned} \tag{2.37}$$

$$V_x - (U^2)_x = -i(V_y + (U^2)_y) \tag{2.38}$$

Мутар түрлендіруінің алгоритмі (2.3., Теорема 7) бойынша, [10, б. 9] жұмысында келтірілген келесі W, A, B, C белгілеулерін қолданамыз:

$$K(\Psi_0) = \begin{pmatrix} iW & A \\ A & -iW \end{pmatrix}, M(\Psi_0) = \begin{pmatrix} B & C \\ -\bar{C} & \bar{B} \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{U} = W \quad (2.39)$$

$$\tilde{V} = A^2 + 2(A\bar{B} - i\bar{C}W) \quad (2.40)$$

мұндағы

$$W = \frac{(const + 1) \cos y + \left(x + \frac{3t}{4}\right) sh\left(x + \frac{t}{4}\right) - ch\left(x + \frac{t}{4}\right)}{(const + 1)^2 - 2(const + 1) \cos y \cdot ch\left(x + \frac{t}{4}\right) + \left(x + \frac{3t}{4}\right)^2 + ch^2\left(x + \frac{t}{4}\right)},$$

$A = i \times$

$$\frac{(const + 1) \left(\cos y \, sh\left(x + \frac{t}{4}\right) + i \sin y \, ch\left(x + \frac{t}{4}\right) \right) - sh\left(x + \frac{t}{4}\right) ch\left(x + \frac{t}{4}\right) - x - \frac{3t}{4}}{(const + 1)^2 - 2(const + 1) \cos y \cdot ch\left(x + \frac{t}{4}\right) + \left(x + \frac{3t}{4}\right)^2 + ch^2\left(x + \frac{t}{4}\right)}$$

$$B = -\frac{i}{2} \cdot th\left(x + \frac{t}{4}\right), C = \frac{i}{2ch\left(x + \frac{t}{4}\right)}.$$

Сонымен, $x^2 \rightarrow x^2 - const$ инверсияланған катеноид мысалын келтіріп, (2.39), (2.40) формулалары көмегімен мВН теңдеулерінің шешімдерін толығымен табамыз:

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x, y, t) &= \\ &= \frac{(const + 1) \cos y + \left(x + \frac{3t}{4}\right) sh\left(x + \frac{t}{4}\right) - ch\left(x + \frac{t}{4}\right)}{(const + 1)^2 - 2(const + 1) \cos y \cdot ch\left(x + \frac{t}{4}\right) + \left(x + \frac{3t}{4}\right)^2 + ch^2\left(x + \frac{t}{4}\right)} \quad (2.41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}(x, y, t) &= \frac{th^2\left(x + \frac{t}{4}\right)}{4} - \\ &- \left(\frac{th\left(x + \frac{t}{4}\right)}{2} + \frac{(const + 1) \left(\cos y \, sh\left(x + \frac{t}{4}\right) + i \sin y \, ch\left(x + \frac{t}{4}\right) \right) - sh\left(x + \frac{t}{4}\right) ch\left(x + \frac{t}{4}\right) - x - \frac{3t}{4}}{(const + 1)^2 - 2(const + 1) \cos y \cdot ch\left(x + \frac{t}{4}\right) + \left(x + \frac{3t}{4}\right)^2 + ch^2\left(x + \frac{t}{4}\right)} \right)^2 - \end{aligned}$$

$$-\frac{\tilde{U}}{ch\left(x + \frac{t}{4}\right)}. \quad (2.42)$$

Дербес жағдайда, $x = y = 0, t = 0$ шарттары арқылы $\tilde{U} = 0$ жаңа потенциалы табылады. Сондықтан

$$\tilde{U}(0,0,t) = \begin{cases} \frac{1}{const}, \text{ егер } t > 0, x^2 \rightarrow x^2 - const, \\ 0, \text{ егер } t = 0, x^2 \rightarrow x^2, \\ -\frac{1}{const}, \text{ егер } t < 0, x^2 \rightarrow x^2 + const. \end{cases}$$

Соңғы теңдіктерден катеноидтың деформациясы нөлден өзге барлық t нүктелері үшін $\frac{1}{const} sgnt$ (сигнум) бөлікті тұрақты функциясын құрастыратынын көреміз. Сонымен қатар, сигнум функциясының туындысын табу үшін Хевисайде функциясының туындысы қарастырылады, ал ол Дирактың дельта функциясына тең болатыны белгілі [36, б. 22].

Келесі теорема [34, б. 30] жұмысында алынған негізгі нәтиже болып табылады:

Теорема (инверсияланған катеноид үшін солитонды деформация туралы).

1) Солитонды деформация ψ бастапқы катеноидты $x^2 \rightarrow x^2 + 1$ екінші координаталық осьтің бойымен тегіс жылжыту арқылы анықталады және келесі модификацияланған Кортевег-де Фриз теңдеуінің (мКдФ) [37, б. 5143]:

$$\tilde{U}_{1t} = \frac{1}{4} \tilde{U}_{1xxx} + 6\tilde{U}_{1x} \tilde{U}_1^2,$$

айқын шешімі

$$\tilde{U}_1(x,t) = \frac{\left(x + \frac{3t}{4}\right) sh\left(x + \frac{t}{4}\right) - ch\left(x + \frac{t}{4}\right)}{\left(x + \frac{3t}{4}\right)^2 + ch^2\left(x + \frac{t}{4}\right)} \quad (2.43)$$

табылады.

2) Инверсияланған катеноид нөлден өзге барлық t нүктелері үшін $\frac{1}{const} sgnt$ бөлікті тұрақты функциясын құрастырады және \tilde{U} потенциалының $x = y = 0$ нүктелерінде келесі теңдік орындалады:

$$\frac{d}{dt} \tilde{U}(0,0,t) = \frac{2}{const} \delta(t),$$

мұндағы $\delta(t)$ - Дирактың дельта функциясы, $const \neq 0$ – нөлден өзге тұрақты. $const \neq 0$ үшін ψ бастапқы катеноидты тегіс жылжыту $x^2 \rightarrow x^2 \pm const$ екінші координаталық осьтің бойымен анықталады және (2.41), (2.42) арқылы анықталған $\tilde{U}(x, y, t), \tilde{V}(x, y, t)$ шешімдері мВН теңдеулерін қанағаттандырады.

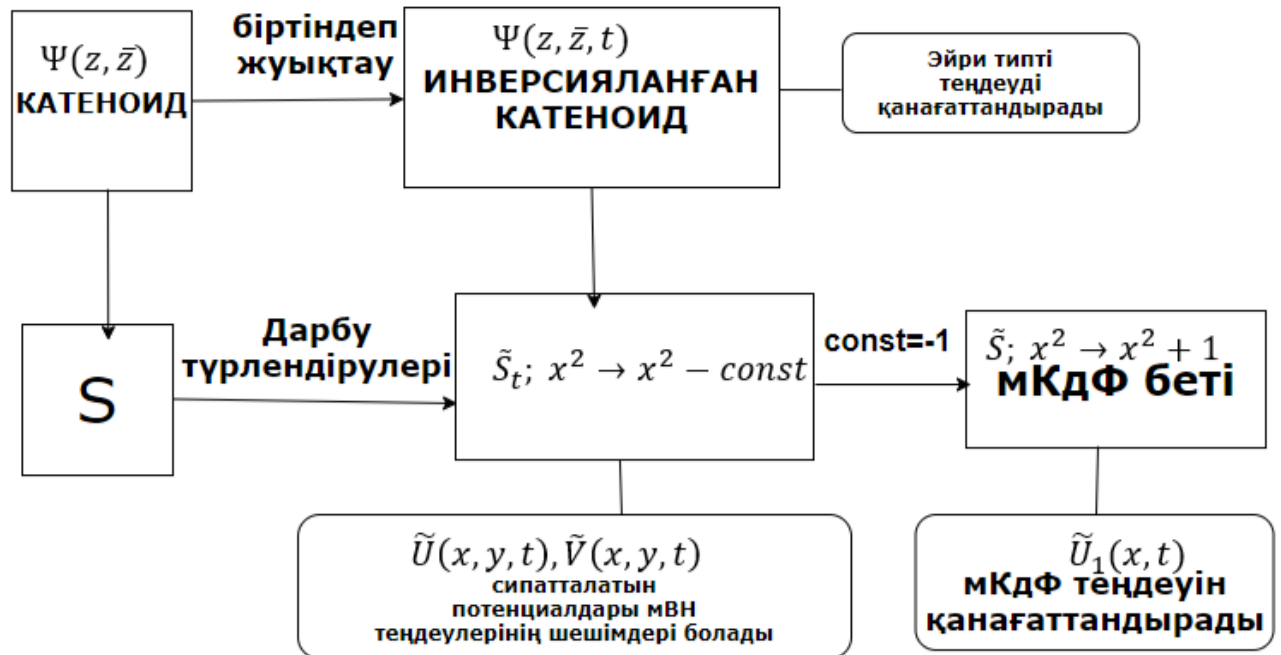
Дәлелі. (2.41) потенциалына $const = -1$ мәнін орнына апарып қойсақ, модификацияланған Кортевег-де Фриз теңдеуінің (мКдФ) $\tilde{U}_1(x, t)$ айқын шешімін табамыз.

Инверсияланған катеноид үшін сипатталатын потенциал Мутар түрлендірулері көмегімен мВН теңдеулерін және инверсияланған катеноид Эйри ([42, б. 209], [51, б. 479]) типті теңдеулерді қанағаттандыратынын ескерте кетейік.

(2.7) бастапқы шарты ретінде катеноид енгізілді, ал инверсияланған катеноид ретінде мКдФ теңдеуін қанағаттандыратын (2.43) сипаттаушы потенциалы $const = -1$ шарты арқылы табылған мКдФ беті [38, б. 15] құрастырылды.

Теореманың екінші бөлігінің дәлелі айқын [36, б. 44].

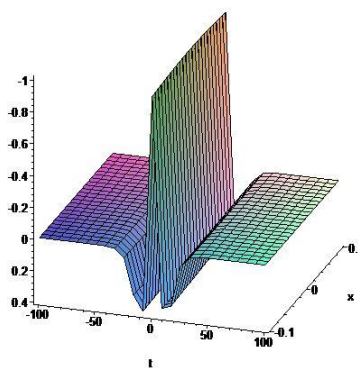
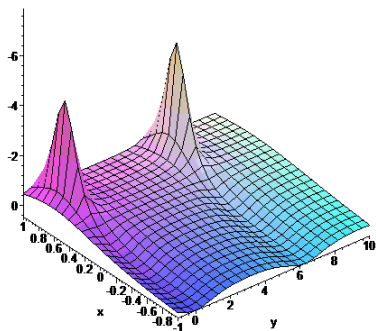
[39, б. 185] жұмысында келтірілген Бэклунд түрлендіруінің диаграммасы негізінде, жоғарыда келтірілген теореманы келесі Сурет 6 - да түсіру (descent, [43, б. 24], [44, б. 333]) әдісі арқылы сипаттауға болады:



Сурет 6 - мКдФ теңдеуінің нақты шешімінің түсіру әдіспен сипаттамасы

Қорытындылай келе, 2.4.2 бөлігінде Вейерштрасс формулаларына талдау жасау арқылы инверсияланған катеноид үшін солитонды деформация табылды. Бастапқы катеноидты $x^2 \rightarrow x^2 + 1$ екінші координаталық осьтің бойымен тегіс жылжыту арқылы инверсияланған катеноидты сипаттайтын потенциал модификацияланған Кортевег-де Фриз тендеуін қанағаттандыратынын дәлелдедік. Алынған нәтижелердің физикалық ғылымдарда қолданылуларын [21, б. 2], [22, б. 1316], [40, б. 1] жұмыстарын зерттеу арқылы табуға болады.

Инверсияланған катеноид үшін солитонды деформацияны келесі Сурет 7 - де көрсетуге болады:



A. $\tilde{U}(x, y, t)$ потенциалы
 $const = 0.1$,
 $x \in [-1, 1], y \in [-1, 10], t \in [-1, 1]$

B. $\tilde{U}_1(x, t)$ потенциалы
 $x \in [-0.1, 0.1], t \in [-100, 100]$

Сурет 7 - Инверсияланған катеноид үшін солитонды деформация

2.4.3 Инверсияланған геликоид үшін солитонды деформациялар

Геликоидтың инверсиясын анықтау үшін Вейерштрасс формулалары [28, б. 113] қолданылады. Диссертациялық жұмыстың бұл бөлігінде инверсияланған геликоид [45, б. 526] үшін солитонды деформациялар келтіріледі.

Инверсияланған геликоид

Егер $\psi: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ минималды бет болса, онда оның инверсиясы $\tilde{\psi} = T \cdot \psi$. Яғни, S минималды бетінің инверсиясы деп -

$$S^{-1}: x \rightarrow -\frac{x}{|x|^2},$$

бейнелеуін атайды, бұл инверсия $u^0 = (0, 0, 0)$ бастапқы нүктесі берілген (сипатталатын потенциалы 0-ге тең болатын) геликоидты $t = y_0$ уақыты

бойынша, $x = y = 0$ нүктесінде (сипатталатын потенциалы \tilde{U} болатын) \tilde{S}_t бетіне көшіреді.

2.1., Мысал 13 - те

$$\tilde{\psi}: \psi_1(z, \bar{z}, t) = \frac{e^{-\frac{z}{2} - \frac{t}{8}}}{\sqrt{2}}, \psi_2(z, \bar{z}, t) = i \frac{e^{\frac{\bar{z}}{2} + \frac{t}{8}}}{\sqrt{2}}$$

(2.5), (2.6), (2.7) бастапқы есебінің шешімі ретінде анықталған инверсияланған геликоид келтірілген, оның Вейерштрасс формулалары (1.18) арқылы келесі координаталары табылады:

$$\begin{aligned} x^1(z, \bar{z}) &= \operatorname{sh}\left(x + \frac{t}{4}\right) \sin y, \\ x^2(z, \bar{z}) &= -\operatorname{sh}\left(x + \frac{t}{4}\right) \cos y, \\ x^3(z, \bar{z}) &= y. \end{aligned} \quad (2.44)$$

мұндағы бастапқы нүктелері әзірше $x_0^1 = x_0^2 = x_0^3 = 0$.

$\psi \rightarrow \tilde{\psi}$ бейнелеуіне сәйкес келесі беттер $S \rightarrow \tilde{S}_t$ арқылы құрастырылады [10, б. 8]:

$$S(x, y) = \begin{pmatrix} iy & ie^{iy} \operatorname{sh} x \\ ie^{-iy} \operatorname{sh} x & -iy \end{pmatrix}.$$

(2.12) формулаға (2.44) апарып қойып, S бетінің деформациялық бөлігі келесі k, l арқылы табылатынын көреміз:

$$k = -\frac{1}{4} e^{-iy} \operatorname{ch}\left(x + \frac{t}{4}\right), l = 0.$$

$t = y_0$ уақыты бойынша S бетінің келесі координаталары арқылы

$$\begin{aligned} x^1(z, \bar{z}) &= \operatorname{sh}\left(x + \frac{y_0}{4}\right) \sin y \\ x^2(z, \bar{z}) &= -\operatorname{sh}\left(x + \frac{y_0}{4}\right) \cos y + y_0 \\ x^3(z, \bar{z}) &= y \end{aligned} \quad (2.45)$$

(мұндағы бастапқы нүктелері $x_0^1 = 0, x_0^2 = y_0, x_0^3 = 0$),

$$\tilde{S}_t = \begin{pmatrix} iy & ie^{iy} sh\left(x + \frac{t}{4}\right) - iy_0 \\ ie^{-iy} sh\left(x + \frac{t}{4}\right) - iy_0 & -iy \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

инверсияланған геликоид құрастырылады.

Енді Мутар түрлендіруін қолданып, (2.37), (2.38) мВН теңдеуінің шешімдерін (2.39), (2.40) формулалары бойынша табамыз:

$$\tilde{U}(x, y, t) = \frac{y sh\left(x + \frac{t}{4}\right) - y_0 \cdot \sin y}{(y_0)^2 - 2y_0 \cdot \cos y \cdot sh\left(x + \frac{t}{4}\right) + y^2 + sh^2\left(x + \frac{t}{4}\right)}, \quad (2.47)$$

$$\tilde{V}(x, y, t) = \frac{th^2\left(x + \frac{t}{4}\right)}{4} -$$

$$- \left(\frac{th\left(x + \frac{t}{4}\right)}{2} + \frac{y_0 \cdot ie^{iy} sh\left(x + \frac{t}{4}\right) - ish\left(x + \frac{t}{4}\right) ch\left(x + \frac{t}{4}\right) - y}{(y_0)^2 - 2y_0 \cos y \cdot sh\left(x + \frac{t}{4}\right) + y^2 + sh^2\left(x + \frac{t}{4}\right)} \right)^2 +$$

$$+ \frac{i\tilde{U}}{ch\left(x + \frac{t}{4}\right)}. \quad (2.48)$$

Тұжырым.

1) Солитонды деформация ψ бастапқы геликоидты $x^2 \rightarrow x^2 + y_0$ екінші координаталық осьтің бойымен тегіс жылжыту арқылы анықталады және (2.47), (2.48) түрінде табылған \tilde{U}, \tilde{V} потенциалдары мВН теңдеулерін қанағаттандырады;

2) $\tilde{U}(x, y, t)$ потенциалының $x = t = 0$ және кез келген y мәнінде

$$\lim_{y \rightarrow 0} \tilde{U}(0, y, 0) = -\frac{1}{2} \quad (2.49)$$

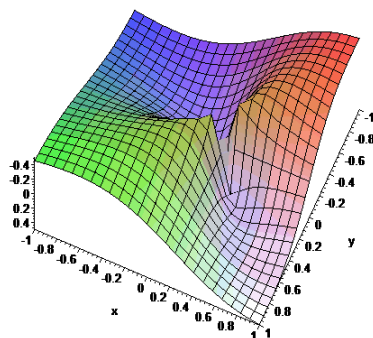
орындалады.

Дәлелі. ψ бастапқы геликоидтың солитонды деформациясы координата басында қатаң жылжыту арқылы анықталады, себебі (2.47) мВН теңдеуінің шешімі бойынша, $\tilde{U}(0,0,0) = 0$ және

$$\lim_{y \rightarrow 0} \tilde{U}(0, y, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{\sin y}{y} = -\frac{1}{2}$$

$\frac{\sin y}{y} \rightarrow 1, y \rightarrow 0$ бірінші тамаша шек бойынша, (2.49) теңдігі орындалады.

Ал $\tilde{U}(0,0,0) \neq -\frac{1}{2}$ болғандықтан, $\tilde{U}(x, y, t)$ потенциалы $x = t = 0, y = 0$ нүктесінде үзілісті функция болады (Сурет 8).



Сурет 8 - Инверсияланған геликоид $x^2 \rightarrow x^2 + const$ үшін солитонды деформация $\tilde{U}(x, y, t), x \in [-1,1], y \in [-1,1], t \in [-1,1]$

3 СОЛИТОНДЫ ДЕФОРМАЦИЯЛАР ҚОЛДАНЫЛУЛАРЫ

3.1 Инверсияланған жоғарғы ретті Эннепер беттері үшін солитонды деформациялар қолданылулары

3.1.1 Екінші ретті Эннепер беті үшін солитонды деформация

2.4.1., Кесте 1 бойынша [11, б. 84] жұмысында көрсетілген екінші ретті Эннепер беті үшін алынған нәтижені Maple бағдарламалық пакетінде қарастырып, аталған бет үшін солитонды деформацияны сипаттауға болады. Мутар түрлендірулері арқылы табылатын потенциалдарды есептеу өте көлемді болғандықтан, мВН теңдеулерінің шешімдерін тексеру үшін және инверсияланған минималды беттерді графикалық түрде суреттеуде келесі командалар енгізіледі:

Түсіндірме. $(\psi_1, \psi_2)^T$ екінші ретті Эннепер беті енгізіледі, $U(z, w, t)$, $V(z, w, t)$ Дирак операторының потенциалдары, мұндағы w деп – z комплекс айнымалысының түйіндесі белгіленген. $V_{conj}(z, w, t)$ деп – $V(z, w, t)$ потенциалының түйіндесі, $\psi_{11}(z, w, t)$ деп – $\psi_1(z, w, t)$ спинорының түйіндесі, $\psi_{22}(z, w, t)$ деп – $\psi_2(z, w, t)$ спинорының түйіндесі, $mk(z, w, t)$ деп – $k(z, w, t)$ функциясының түйіндесі белгіленген. Нәтижесінде **Unew**, **Vnew** – мВН теңдеулерінің шешімдері табылады.

> restart; with(LinearAlgebra);

psi1 := proc (z, w, t) options operator, arrow; z^2 end proc;

psi2 := proc (z, w, t) options operator, arrow; 1 end proc;

psi11 := proc (z, w, t) options operator, arrow; w^2 end proc;

psi22 := proc (z, w, t) options operator, arrow; 1 end proc;

U := proc (z, w, t) options operator, arrow; 0 end proc; V := proc (z, w, t) options operator, arrow; 0 end proc; Vconj := proc (z, w, t) options operator, arrow; 0 end proc;

G := Matrix (2, 2, {(1, 1) = 0, (1, 2) = 1, (2, 1) = -1, (2, 2) = 0}); a := 0; b := 0; c := 0;

Pzi := proc (z, w, t) options operator, arrow; Matrix ([[psi1(z, w, t), -psi22(z, w, t)], [psi2(z, w, t), psi11(z, w, t)]]) end proc;

k := proc (z, w, t) options operator, arrow; (diff (psi1(z, w, t), z))^2 - (diff (psi2(z, w, t), w))^2 - 2*psi1(z, w, t) *(diff (psi1(z, w, t), w)) + 2*psi2(z, w, t) *(diff (psi2(z, w, t), w)) end proc;

l := proc (z, w, t) options operator, arrow; (diff (psi1(z, w, t), z)) *(diff (psi22(z, w, t), z)) + (diff (psi11(z, w, t), w)) *(diff (psi2(z, w, t), w)) - (diff (psi1(z, w, t), w)) *(diff (psi22(z, w, t), w)) - (diff (psi11(z, w, t), w)) *(diff (psi2(z, w, t), w)) - (diff (psi2(z, w, t), w)) *(diff (psi11(z, w, t), w)) end proc;

mk := proc (z, w, t) options operator, arrow; subs (I = -I, k (w, z, t)) end proc;

u [1] := proc (z, w) options operator, arrow; ((1/2) * I) *(int (psi1(l, 0, 0) ^2 + psi22(l, 0, 0) ^2, l = 0 .. z) - (int (psi11(z, l, 0) ^2 + psi2(z, l, 0) ^2, l = 0 .. w))) end proc;

u [2] := proc (z, w) options operator, arrow; (1/2) *(int (psi22(l, 0, 0) ^2 - psi1(l, 0, 0) ^2, l = 0 .. z)) + (1/2) *(int (psi2(z, l, 0) ^2 - psi11(z, l, 0) ^2, l = 0 .. w)) end proc;

```

u [3]: = proc (z, w) options operator, arrow; int (psi1(1, 0, 0) *psi22(1, 0, 0), 1 = 0 .. z)
+int (psi11(z, 1, 0) *psi2(z, 1, 0), 1 = 0 .. w)-4*C end proc;
S := proc (z, w, t) options operator, arrow; G.(Matrix(2, 2, {(1, 1) = I*u[2](z, w, t)-
u[1](z, w, t), (1, 2) = I*u[3](z, w, t), (2, 1) = I*u[3](z, w, t), (2, 2) = -I*u[2](z, w, t)-
u[1](z, w, t)}))+I*G.(Matrix(2, 2, {(1, 1) = int(k(z, w, tau), tau = 0 .. t), (1, 2) = int(-
l(z, w, tau), tau = 0 .. t), (2, 1) = int(-l(z, w, tau), tau = 0 .. t), (2, 2) = int(-mk(z, w, tau),
tau = 0 .. t)}))+G.(Matrix(2, 2, {(1, 1) = a+I*b, (1, 2) = I*c, (2, 1) = I*c, (2, 2) = a-
I*b})) end proc;
# Осы жерде Мутар түрлендіруі басталады;

```

```

InvS := proc (z, w, t) options operator, arrow; simplify(MatrixInverse(S(z, w, t))) end
proc;
K := proc (z, w, t) options operator, arrow; simplify(Pzi(z, w, t).InvS(z, w,
t).G.Transpose(Pzi(z, w, t)).MatrixInverse(G)) end proc;
M := proc (z, w, t) options operator, arrow; I*G.(Matrix(2, 2, {(1, 1) = diff(psi1(z, w,
t), z)-(diff(psi1(z, w, t), w)), (1, 2) = -(diff(psi22(z, w, t), z))+diff(psi22(z, w, t), w), (2,
1) = diff(psi2(z, w, t), z)-(diff(psi2(z, w, t), w)), (2, 2) = diff(psi11(z, w, t), z)-
(diff(psi11(z, w, t), w))})).MatrixInverse(Pzi(z, w, t)).MatrixInverse(G) end proc;
Unew := proc (z, w, t) options operator, arrow; -I*K(z, w, t)[1, 1] end proc;
Vnew := proc (z, w, t) options operator, arrow; K(z, w, t)[1, 2]^2+2*M(z, w, t)[2,
2]*K(z, w, t)[1, 2]-2*M(z, w, t)[2, 1]*K(z, w, t)[2, 2] end proc;
Vnewconj := proc (z, w, t) options operator, arrow; K(z, w, t)[2, 1]^2-2*M(z, w, t)[1,
1]*K(z, w, t)[2, 1]-2*M(z, w, t)[1, 2]*K(z, w, t)[2, 2] end proc;

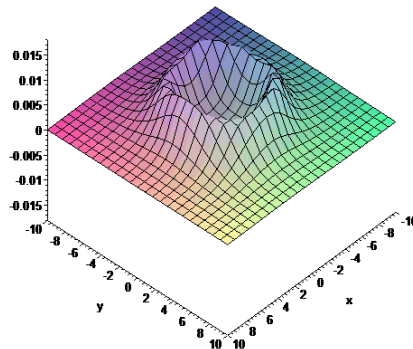
```

мВН теңдеулерінің шешімдерін тексеру;

```

simplify (diff (Vnew (z, w, t), w) -(diff (Unew (z, w, t) ^2, z)));
simplify (diff (Unew (z, w, t), t)- (diff (Unew (z, w, t), `\$` (z, 3)))-3*(diff (Unew (z, w,
t), z)) *Vnew (z, w, t) - (3/2) *Unew (z, w, t) *(diff (Vnew (z, w, t), z)) - (diff (Unew
(z, w, t), `\$` (w, 3)))-3*(diff (Unew (z, w, t), w)) *Vnewconj (z, w, t) - (3/2) * Unew
(z, w, t) * (diff (Vnewconj (z, w, t), w)));

```



Сурет 9 - Екінші ретгі Эннепер беті үшін солитонды деформация
 $const = 0.1, x \in [-10, 10], y \in [-10, 10], t \in [-100, 100]$

Қорытындылай келе, 2.4.1., Кесте 1 - де келтірілген $a = b = c = 0$ параметрлері үшін екінші ретті Эннепер бетінің инверсиясын сипаттайтын $\tilde{U}(x, y, t)$ потенциалы сингулярлы (Сурет 9) болады және осы беттің солитонды деформациясы $u [3] \rightarrow u [3] - 4 * const$ үшінші координаталық осьтің бойымен қатаң жылжыту арқылы табылған [11, б. 84].

3.1.2 Үшінші ретті Эннепер беті үшін солитонды деформация

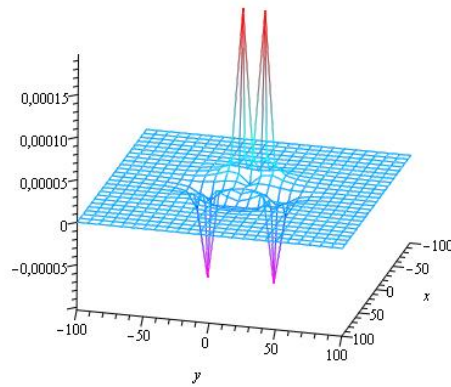
2.4.1., Кесте 1 бойынша көрсетілген үшінші ретті Эннепер беті үшін солитонды деформация [23, б. 161] жұмысында табылған. мВН теңдеулерінің шешімдерін тексеру және инверсияланған минималды беттерді графикалық түрде суреттеу үшін келесі командалар енгізіледі:

```
>psi1 := proc (z, w, t) options operator, arrow; z^3+6*t end proc;
psi2 := proc (z, w, t) options operator, arrow; 1 end proc;
psi11 := proc (z, w, t) options operator, arrow; w^3+6*t end proc;
psi22 := proc (z, w, t) options operator, arrow; 1 end proc;
# U, V, a := 0; b := 0; c := 0; G, Pzi, k, l, tk жоғарыда енгізілген командалар
қайталанады;
```

```
u[1] := proc (z, w, t) options operator, arrow; ((1/2)*I)*(int(psi1(l, 0, 0)^2+psi22(l, 0,
0)^2, l = 0 .. z)-(int(psi11(z, l, 0)^2+psi2(z, l, 0)^2, l = 0 .. w))) end proc;
u[2] := proc (z, w, t) options operator, arrow; (1/2)*(int(psi22(l, 0, 0)^2-psi1(l, 0, 0)^2,
l = 0 .. z))+(1/2)*(int(psi2(z, l, 0)^2-psi11(z, l, 0)^2, l = 0 .. w)) end proc;
u[3] := proc (z, w) options operator, arrow; int(psi1(l, 0, 0)*psi22(l, 0, 0), l = 0 ..
z)+int(psi11(z, l, 0)*psi2(z, l, 0), l = 0 .. w) end proc;
```

Осы жерде S матрицасы және Мутар түрлендіруінің командалары қайталанады;

```
Unew := proc (z, w, t) options operator, arrow; -I*K(z, w, t)[1, 1] end proc;
Vnew := proc (z, w, t) options operator, arrow; K(z, w, t)[1, 2]^2+2*M(z, w, t)[2,
2]*K(z, w, t)[1, 2]-2*M(z, w, t)[2, 1]*K(z, w, t)[2, 2] end proc;
Vnewconj := proc (z, w, t) options operator, arrow; K(z, w, t)[2, 1]^2-2*M(z, w, t)[1,
1]*K(z, w, t)[2, 1]-2*M(z, w, t)[1, 2]*K(z, w, t)[2, 2] end proc;
# мВН теңдеулерінің шешімдері тексеріледі;
U := proc (x, y, t) options operator, arrow; simplify(subs(z = x+I*y, w = x-I*y, Unew(z,
w, t))) end proc;
animate3d(U(x, y, t), x = -100 .. 100, y = -100 .. 100, t = -10000 .. 10000, shading =
zhue, style = wireframe, orientation = [90, 68]);
```



Сурет 10 - Үшінші ретті Эннепер беті үшін солитонды деформация
 $a = b = c = 0, x \in [-100, 100], y \in [-100, 100], t \in [-10000, 10000]$

Қорытынды. $a = b = c = 0$ параметрлері үшін үшінші ретті Эннепер бетінің инверсиясын сипаттайтын $\tilde{U}(x, y, t)$ потенциалы сингулярлы (Сурет 10) болады және солитонды деформациясы $u[1] \rightarrow u[1], u[2] \rightarrow u[2], u[3] \rightarrow u[3]$, яғни осы беттің инверсиясы тек координата басында ғана қатаң бекіту арқылы табылған [23, б. 161]. Ары қарай бетті тегіс жылжыту [35, б. 165] жұмысында табылған.

3.1.3 Төртінші ретті Эннепер беті үшін солитонды деформация

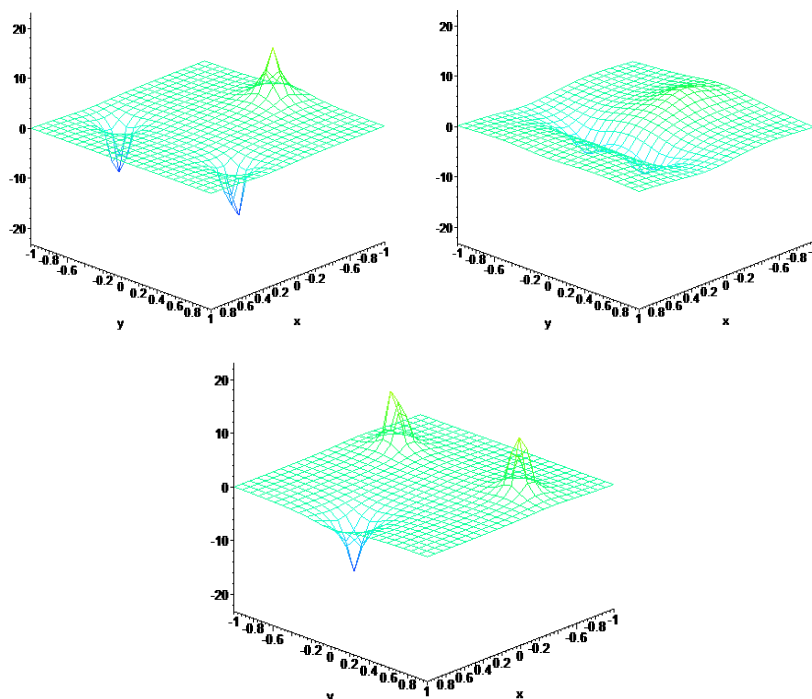
Диссертациялық жұмыстың осы бөлігінде 2.4.1., Кесте 1 бойынша талданған төртінші ретті Эннепер беті үшін солитонды деформацияны $a = b = c = 0$ үшін регулярлы потенциалдар арқылы табылатынын (Maple көмегімен) көрсетеміз және үшінші ретті дербес туындылары сингулярлы екендігі шығады.

```
>psi1 := proc (z, w, t) options operator, arrow; z^4+24*z*t end proc;
psi2 := proc (z, w, t) options operator, arrow; 1 end proc;
psi11 := proc (z, w, t) options operator, arrow; w^4+24*w*t end proc;
psi22 := proc (z, w, t) options operator, arrow; 1 end proc;
# U,V, a := 0; b := 0; c := 0; G, Pzi, k,l, tk жоғарыда енгізілген командалар
қайталанады;
u[1] := proc (z, w, t) options operator, arrow; ((1/2)*I)*(int(psi1(l, 0, 0)^2+psi22(l, 0,
0)^2, l = 0 .. z)-(int(psi11(z, l, 0)^2+psi2(z, l, 0)^2, l = 0 .. w))) end proc;
u[2] := proc (z, w, t) options operator, arrow; (1/2)*(int(psi22(l, 0, 0)^2-psi1(l, 0, 0)^2,
l = 0 .. z))+1/2*(int(psi2(z, l, 0)^2-psi11(z, l, 0)^2, l = 0 .. w)) end proc;
u[3] := proc (z, w) options operator, arrow; int(psi1(l, 0, 0)*psi22(l, 0, 0), l = 0 ..
z)+int(psi11(z, l, 0)*psi2(z, l, 0), l = 0 .. w) end proc;
# Осы жерде S матрицасы және Мутар түрлендіруінің командалары
қайталанады;
Unew := proc (z, w, t) options operator, arrow; -I*K(z, w, t)[1, 1] end proc;
Vnew := proc (z, w, t) options operator, arrow; K(z, w, t)[1, 2]^2+2*M(z, w, t)[2,
2]*K(z, w, t)[1, 2]-2*M(z, w, t)[2, 1]*K(z, w, t)[2, 2] end proc;
Vnewconj := proc (z, w, t) options operator, arrow; K(z, w, t)[2, 1]^2-2*M(z, w, t)[1,
1]*K(z, w, t)[2, 1]-2*M(z, w, t)[1, 2]*K(z, w, t)[2, 2] end proc;
```

```

# мВН теңдеулерінің шешімдері тексеріледі;
U := proc (x, y, t) options operator, arrow; simplify(subs(z = x+I*y, w = x-I*y, Unew(z,
w, t))) end proc;
animate3d(U(x, y, t), x = -1 .. 1, y = -1 .. 1, t = -1 .. 1, shading = zhue, style = wireframe,
orientation = [90, 68]);

```



Сурет 11 - Төртінші ретті Эннепер беті үшін солитонды деформация
 $a = b = c = 0, x \in [-1, 1], y \in [-1, 1], t \in [-1, 1]$

Төртінші ретті Эннепер бетін сипаттайтын $\tilde{U}(x, y, t)$ потенциалының x, y айнымалыларына қатысты үшінші ретті дербес туындыларының сингулярлығы;

```

d1UD := proc (x, y, t) options operator, arrow; diff(UD(x, y, t), `$`(x, 3)) end proc;
d2UD := proc (x, y, t) options operator, arrow; diff(UD(x, y, t), `$`(y, 3)) end proc;
B1 := proc (r, p) options operator, arrow; simplify(subs(x = r*cos(p), y = r*sin(p),
d1UD(x, y, 0))) end proc;
B2 := proc (r, p) options operator, arrow; simplify (subs(x = r*cos(p), y = r*sin(p),
d2UD(x, y, 0))) end proc;
combine (limit (B1(r, p), r = 0)); combine (limit (B2(r, p), r = 0));

```

$$\begin{aligned}
& -\frac{192}{5} \cos 2p + \frac{288}{5} \cos 4p - \frac{192}{5} \cos 6p + \frac{48}{5} \cos 8p \\
& -\frac{192}{5} \sin 2p - \frac{288}{5} \sin 4p - \frac{192}{5} \sin 6p - \frac{48}{5} \sin 8p
\end{aligned}$$

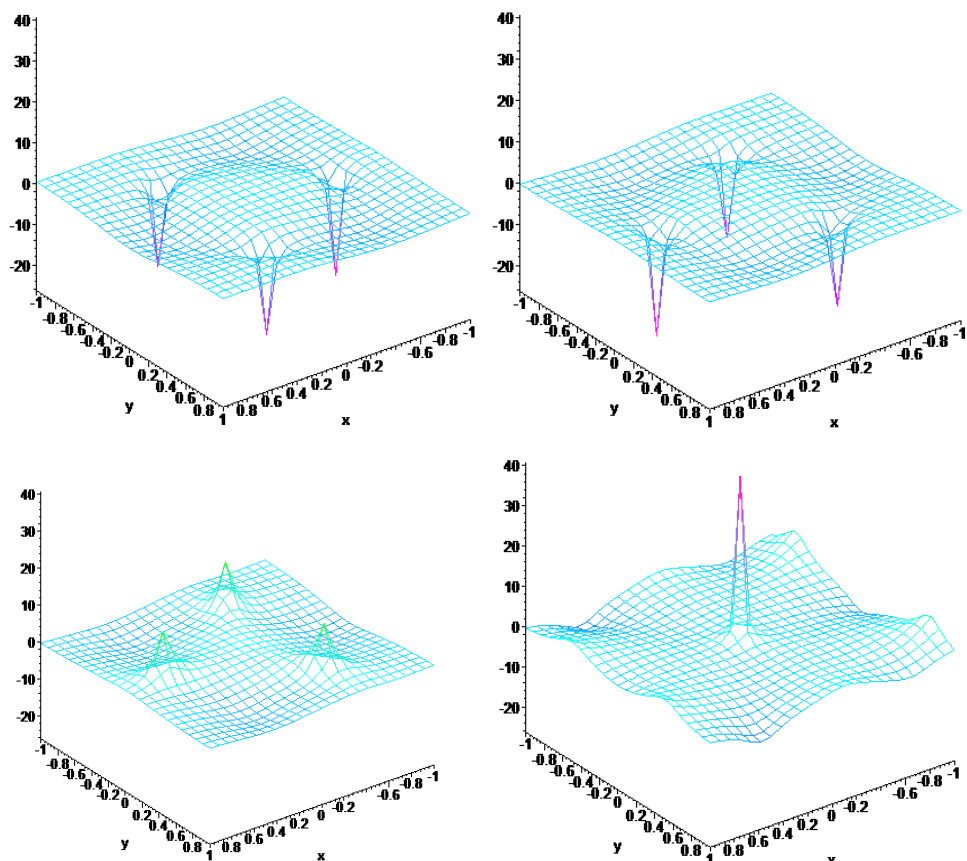
Қорытынды. $a = b = c = 0$ параметрлері үшін төртінші ретті Эннепер бетінің инверсиясын сипаттайтын $\tilde{U}(x, y, t)$ потенциалы регулярлы болады және осы беттің инверсиясы $u[1] \rightarrow u[1], u[2] \rightarrow u[2], u[3] \rightarrow u[3]$ координата басында ғана қатаң бекіту анықталады. Сонымен қатар, төртінші ретті Эннепер бетін сипаттайтын $\tilde{U}(x, y, t)$ потенциалының x, y айнымалыларына қатысты үшінші ретті дербес туындылары сингулярлы (Сурет 11) болады.

3.1.4 Бесінші ретті Эннепер беті үшін солитонды деформация

```

>psi1 := proc (z, w, t) options operator, arrow; z^5+60*z^2*t end proc;
psi2 := proc (z, w, t) options operator, arrow; 1 end proc;
psi11 := proc (z, w, t) options operator, arrow; w^5+60*w^2*t end proc;
psi22 := proc (z, w, t) options operator, arrow; 1 end proc;
# U, V, a := 0; b := 0; c := 0; G, Pzi, k, l, tk жоғарыда енгізілген командалар
қайталанады;
u[1] := proc (z, w, t) options operator, arrow; ((1/2)*I)*(int(psi1(l, 0, 0)^2+psi22(l, 0,
0)^2, l = 0 .. z)-(int(psi11(z, l, 0)^2+psi2(z, l, 0)^2, l = 0 .. w))) end proc;
u[2] := proc (z, w, t) options operator, arrow; (1/2)*(int(psi22(l, 0, 0)^2-psi1(l, 0, 0)^2,
l = 0 .. z))+(1/2)*(int(psi2(z, l, 0)^2-psi11(z, l, 0)^2, l = 0 .. w)) end proc;
u[3] := proc (z, w, t) options operator, arrow; int(psi1(l, 0, 0)*psi22(l, 0, 0), l = 0 ..
z)+int(psi11(z, l, 0)*psi2(z, l, 0), l = 0 .. w) end proc;
# Осы жерде S матрицасы және Мутар түрлендіруінің командалары
қайталанады;
Unew := proc (z, w, t) options operator, arrow; -I*K(z, w, t)[1, 1] end proc;
Vnew := proc (z, w, t) options operator, arrow; K(z, w, t)[1, 2]^2+2*M(z, w, t)[2,
2]*K(z, w, t)[1, 2]-2*M(z, w, t)[2, 1]*K(z, w, t)[2, 2] end proc;
Vnewconj := proc (z, w, t) options operator, arrow; K(z, w, t)[2, 1]^2-2*M(z, w, t)[1,
1]*K(z, w, t)[2, 1]-2*M(z, w, t)[1, 2]*K(z, w, t)[2, 2] end proc;
# мВН теңдеулерінің шешімдері тексеріледі;
U := proc (x, y, t) options operator, arrow; simplify(subs(z = x+I*y, w = x-I*y, Unew(z,
w, t))) end proc;
animate3d(U(x, y, t), x = -1 .. 1, y = -1 .. 1, t = -0.1 .. 0.1, shading = zhue, style =
wireframe, orientation = [90, 68]);

```



Сурет 12 - Бесінші ретті Эннепер беті үшін солитонды деформация
 $a = b = c = 0, x \in [-1, 1], y \in [-1, 1], t \in [-0.1, 0.1]$

Бесінші ретті Эннепер бетін сипаттайтын $\tilde{U}(x, y, t)$ потенциалының x, y айнымалыларына қатысты төртінші ретті дербес туындыларының сингулярлығы;

```
d1UD := proc (x, y, t) options operator, arrow; diff(UD(x, y, t), `$(x, 4)) end proc;
d2UD := proc (x, y, t) options operator, arrow; diff(UD(x, y, t), `(y, 4)) end proc;
B1 := proc (r, p) options operator, arrow; simplify(subs(x = r*cos(p), y = r*sin(p),
d1UD(x, y, 0))) end proc;
B2 := proc (r, p) options operator, arrow; simplify (subs(x = r*cos(p), y = r*sin(p),
d2UD(x, y, 0))) end proc;
combine (limit (B1(r, p), r = 0)); combine (limit (B2(r, p), r = 0));
```

$$-200\cos 2p + 400\cos 4p - 400\cos 6p + 200\cos 8p - 40\cos 10p$$

$$-200\cos 2p - 400\cos 4p - 400\cos 6p - 200\cos 8p - 40\cos 10p$$

Қорытынды. $a = b = c = 0$ параметрлері үшін бесінші ретті Эннепер бетінің инверсиясын сипаттайтын $\tilde{U}(x, y, t)$ потенциалы регулярлы болады және осы беттің инверсиясы $u[1] \rightarrow u[1], u[2] \rightarrow u[2], u[3] \rightarrow u[3]$ координата

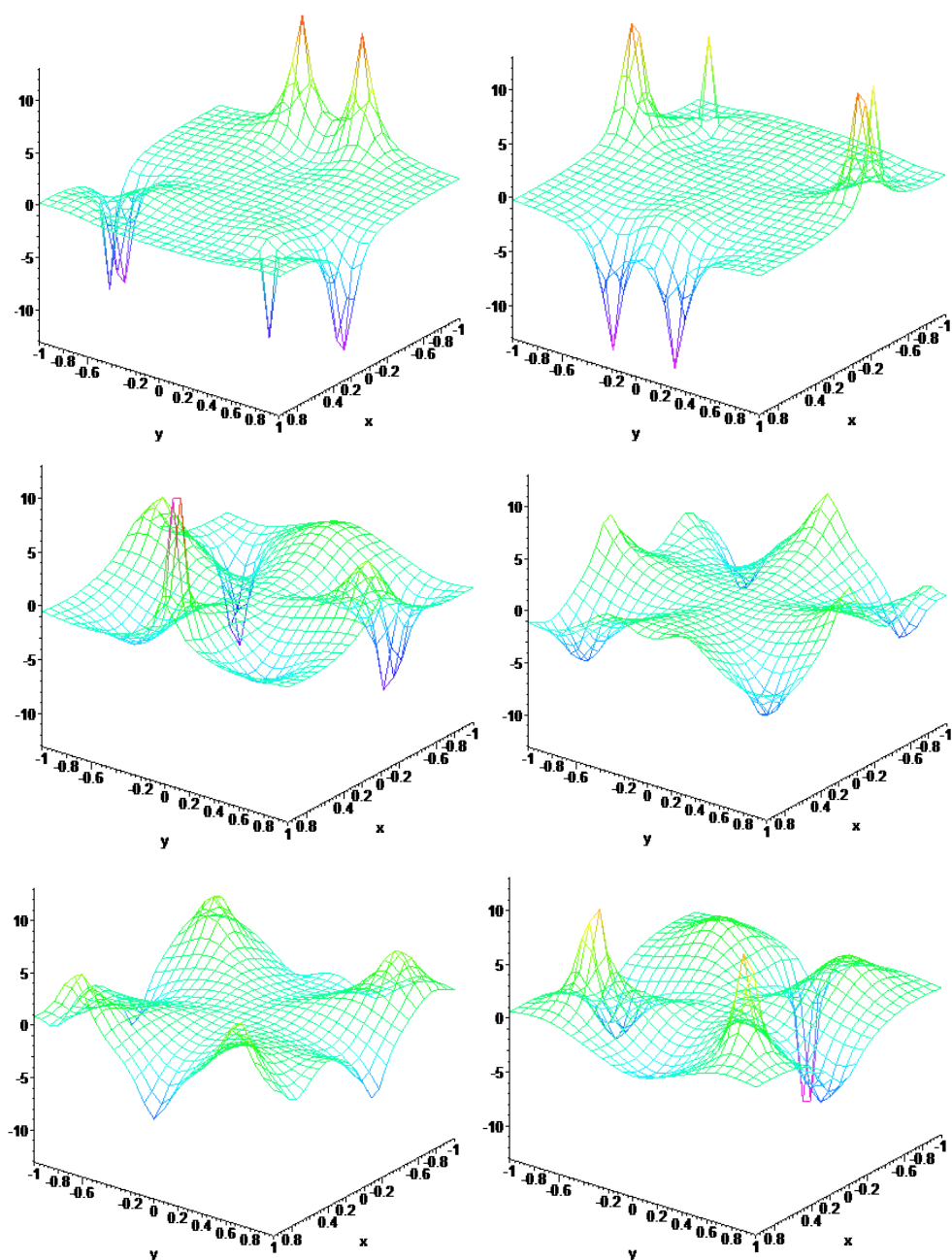
басында ғана қатаң бекіту анықталады. Сонымен қатар, бесінші ретті Эннепер бетін сипаттайтын $\tilde{U}(x, y, t)$ потенциалының x, y айнымалыларына қатысты төртінші ретті дербес туындылары сингулярлы (Сурет 12) болады.

3.1.5 Алтыншы ретті Эннепер беті үшін солитонды деформация

```

>psi1 := proc (z, w, t) options operator, arrow; z^6+120*z^3*t+360*t^2 end proc;
psi2 := proc (z, w, t) options operator, arrow; 1 end proc;
psi11 := proc (z, w, t) options operator, arrow; w^6+120*w^3*t+360*t^2 end proc;
psi22 := proc (z, w, t) options operator, arrow; 1 end proc;
# U, V, a := 0; b := 0; c := 0; G, Pzi, k, l, tk жоғарыда енгізілген командалар
қайталанады;
u[1] := proc (z, w, t) options operator, arrow; ((1/2)*I)*(int(psi1(l, 0, 0)^2+psi22(l, 0,
0)^2, l = 0 .. z)-(int(psi11(z, l, 0)^2+psi2(z, l, 0)^2, l = 0 .. w))) end proc;
u[2] := proc (z, w, t) options operator, arrow; (1/2)*(int(psi22(l, 0, 0)^2-psi1(l, 0, 0)^2,
l = 0 .. z))+(1/2)*(int(psi2(z, l, 0)^2-psi11(z, l, 0)^2, l = 0 .. w)) end proc;
u[3] := proc (z, w) options operator, arrow; int(psi1(l, 0, 0)*psi22(l, 0, 0), l = 0 ..
z)+int(psi11(z, l, 0)*psi2(z, l, 0), l = 0 .. w) end proc;
# Осы жерде S матрицасы және Мутар түрлендіруінің командалары
қайталанады;
Unew := proc (z, w, t) options operator, arrow; -I*K(z, w, t)[1, 1] end proc;
Vnew := proc (z, w, t) options operator, arrow; K(z, w, t)[1, 2]^2+2*M(z, w, t)[2,
2]*K(z, w, t)[1, 2]-2*M(z, w, t)[2, 1]*K(z, w, t)[2, 2] end proc;
Vnewconj := proc (z, w, t) options operator, arrow; K(z, w, t)[2, 1]^2-2*M(z, w, t)[1,
1]*K(z, w, t)[2, 1]-2*M(z, w, t)[1, 2]*K(z, w, t)[2, 2] end proc;
# мВН теңдеулерінің шешімдері тексеріледі;
U := proc (x, y, t) options operator, arrow; simplify(subs(z = x+I*y, w = x-I*y, Unew(z,
w, t))) end proc;
animate3d(U(x, y, t), x = -1 .. 1, y = -1 .. 1, t = -0.1 .. 0.1, shading = zhue, style =
wireframe, orientation = [90, 68]);

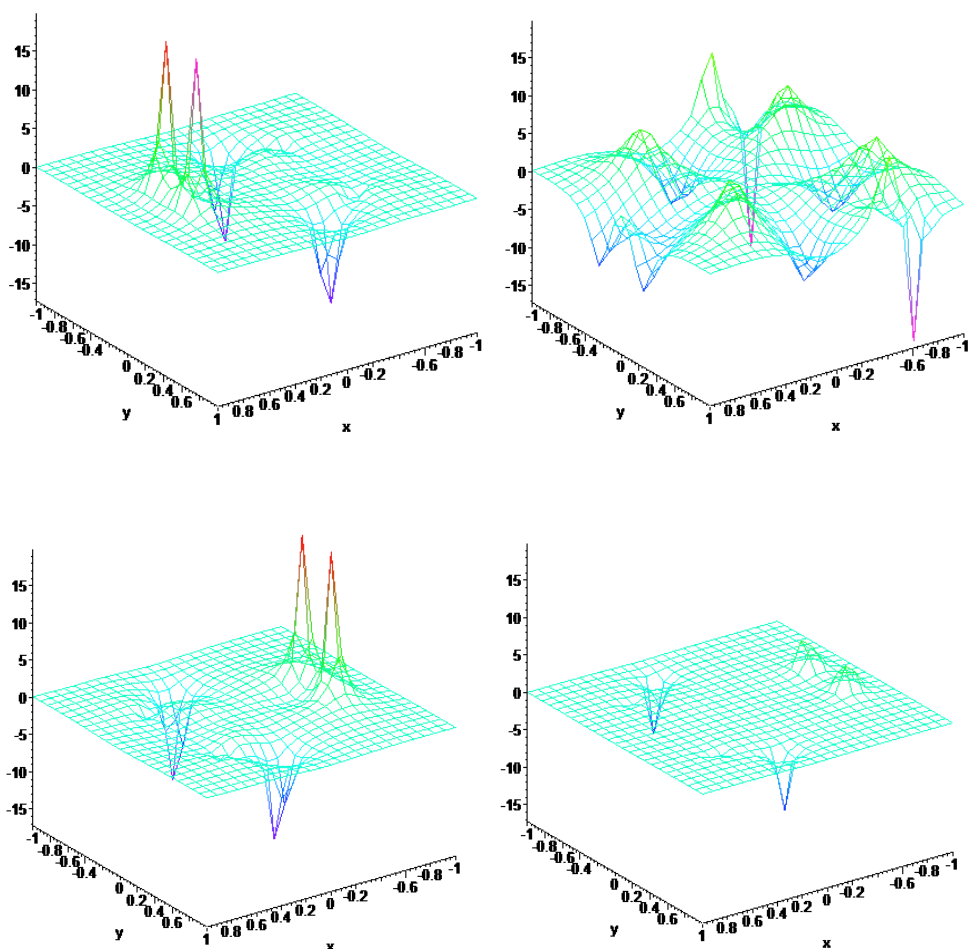
```



Сурет 13 - Алтыншы ретті Эннепер беті үшін солитонды деформация
 $a = b = c = 0, x \in [-1, 1], y \in [-1, 1], t \in [-0.1, 0.1]$

Қорытынды. $a = b = c = 0$ параметрлері үшін алтыншы ретті Эннепер бетінің инверсиясын сипаттайтын $\tilde{U}(x, y, t)$ потенциалы сингулярлы (Сурет 13) болады.

Тоғызыншы ретті Эннепер беті үшін солитонды деформацияны келесі Сурет 14 динамикасынан көруге болады:



Сурет 14 -Тоғызыншы ретті Эннепер беті үшін солитонды деформация
 $a = b = c = 0, x \in [-1, 1], y \in [-1, 1], t \in [-0.1, 0.1]$

3.2 Инверсияланған жоғарғы ретті Эннепер беттері үшін солитонды деформацияның ойындар теориясында қолданылуы

Ойындар теориясында негізгі ұғымдардың бірі – Нэш тепе-теңдігі (Nash Equilibria) [41, б. 39] жоғарғы ретті Эннепер беттері үшін табылады. Ал ойындар теориясының негізгі құралдарының бірі – шешімдер ағашы [41, б. 75] болып табылады. Осы шешімдер ағашында біз келесі ойыншыларды енгіземіз:

Inverted $3p$ – үшеселі Эннепер беттерінің инверсиясы;

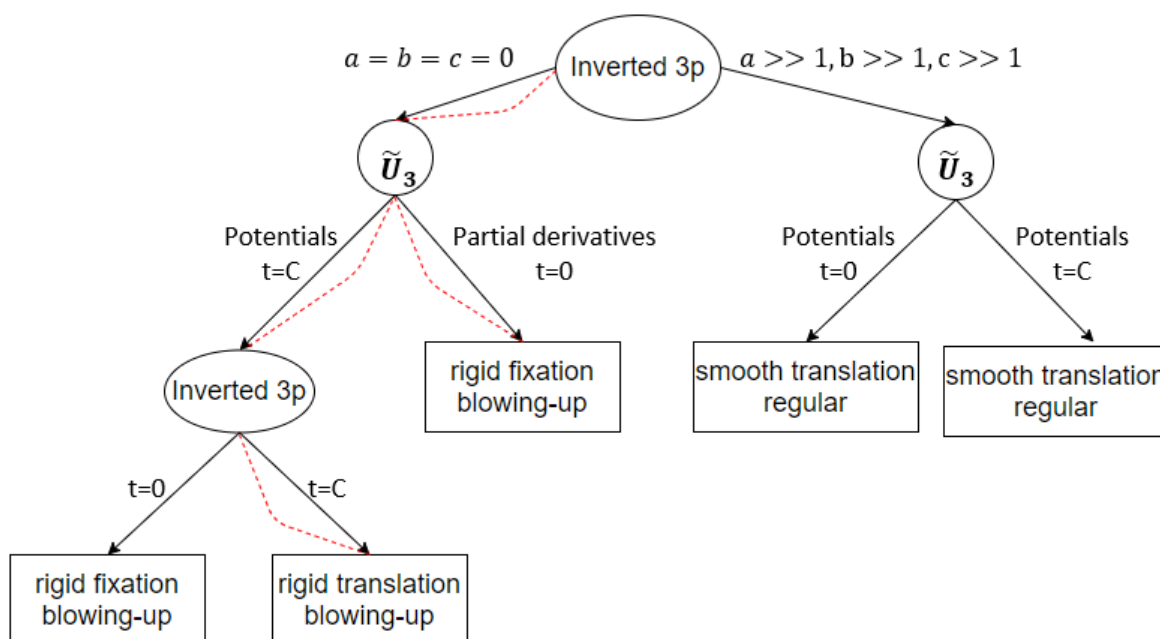
\tilde{U}_3 - үшеселі Эннепер беттерінің солитонды деформациясын анықтайтын потенциалдар;

$\mathbb{N} - \{3p\}$ – натурал сандар жиынынан үшеселі реттері алынған Эннепер беттерінің инверсиясы.

\tilde{U}_4 - натурал сандар жиынынан үшеселі реттері алынған Эннепер беттерінің солитонды деформациясын анықтайтын потенциалдар.

Шешімдер ағашының (Сурет 15, Сурет 16) жауабы ретінде Нэш тепе-теңдіктері табылады. Ол үшін ағаштар терминінде белгілі кері индукция (Backward induction) [41, б. 80] қолданылады. Осы алгоритм нәтижесінде екі ойыншыға да қандайда тиімді әрекет (action) таңдау арқылы қатаң жылжыту/бекіту (**rigid**

translation/fixation) және бұзылушы шешімдер (**blowing-up**) стратегиялары табылады.



Сурет 15 - Үшеселі ретті Эннепер беттері үшін солитонды деформациясының шешімдер ағашы

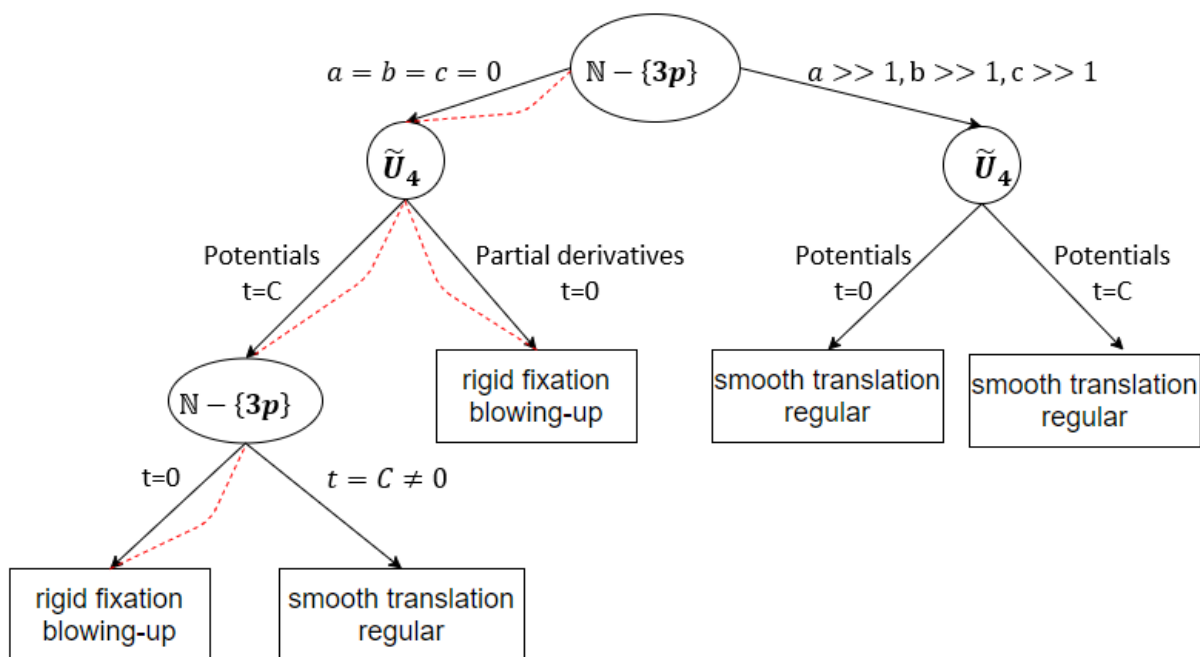
Бұл жерде ағаштың соңғы түйіндері мен түбірін қосатын әрекеттер кері индукция шешімдерін анықтайды. Ал осы шешімдер келесі Нэш тепе-теңдіктерінің ішіне кіреді:

$$NE_1 = ((a = b = c = 0, t = C), \text{Potentials } t = C)$$

$$NE_2 = (a = b = c = 0, \text{Partial derivatives } t = 0)$$

мұндағы NE_1 - бірінші Нэш тепе-теңдігі (Inverted 3p, \tilde{U}_3) әрекеттері, оның нәтижелері (outcomes) – (rigid translation, blowing-up) ашық сұрақ болып есептеледі.

NE_2 - екінші Нэш тепе-теңдігі, оның нәтижелері (outcomes) – (rigid fixation, blowing-up) (Сурет 15). (rigid fixation, blowing-up) нәтижесіне 2.4.1 - бөлігі, Теорема 8 - дің Салдары 2 жауап береді.



Сурет 16 - Натурал сандар жиынынан үшеселі реттері алынған Эннепер беттері үшін солитонды деформациясының шешімдер ағашы

$$NE_3 = ((a = b = c = 0, t = 0), \text{Potentials } t = C)$$

$$NE_4 = (a = b = c = 0, \text{Partial derivatives } t = 0)$$

мұндағы NE_3 - үшінші Нэш тепе-теңдігі ($N - \{3p\}, \tilde{U}_4$) әрекеттері, оның нәтижелері (outcomes) - (rigid fixation, blowing-up), бұл нәтижелерге 2.4.1 - бөлігінің Теорема 8 - дің Салдары 1 жауап береді.

NE_4 - төртінші Нэш тепе-теңдігі, оның нәтижелері (outcomes) – (rigid fixation, blowing-up) (Сурет 16). (rigid fixation, blowing-up) нәтижесіне 2.4.1 - бөлігінің Теорема 8 - дің Салдары 2 жауап береді.

ҚОРЫТЫНДЫ

Диссертациялық жұмыста инверсияланған катеноид, геликоид және инверсияланған жоғарғы ретті Эннепер беттері зерттелген. Зерттеу барысында инверсияланған минималды беттер үшін солитонды деформациялар келесі қадамдар арқылы табылған:

- 1) модификацияланған Веселов-Новиков теңдеулері және модификацияланған Кортвег-де Фриз теңдеуінің нақты шешімдерін табу;
- 2) бастапқы минималды беттерді (катеноид, геликоид, жоғарғы ретті Эннепер беттерін) қандайда координаталық осьтің (түзудің) бойымен тегіс жылжыту-бекіту және қатаң жылжыту-бекіту деформациялары арқылы мВН теңдеулерінің регулярлы және бұзылушы шешімдерін құрастыру;

Диссертациялық жұмыста келесі нәтижелер алынған:

- жоғарғы ретті Эннепер беттері, катеноид және геликоид мысалдарын келтіру арқылы мВН теңдеулерінің нақты шешімдері табылған;
- катеноид мысалын енгізу арқылы мКдФ теңдеуінің нақты шешімі табылған;
- инверсияланған жоғарғы ретті Эннепер беттері, катеноид және геликоид үшін солитонды деформациялар құрастырылған.

Диссертациялық жұмыстың соңғы бөлімінде келтірілген инверсияланған жоғарғы ретті Эннепер беттері үшін солитонды деформациялар қолданылулары нәтижесінде мВН теңдеулерінің *шартты бұзылушы шешімдеріне* (conditionally blowing-up solutions, [46, б. 1058]) кеңірек талдау жасалып, осы шешімдердің аналитикалық формулалары толығымен тексерілген. Дегенмен, үшеселі ретті инверсияланған Эннепер беттері үшін солитонды деформациялар нәтижесінде мВН теңдеулерінің бұзылушы шешімдерін зерттеу үшін жаңа әдіс, жаңа тұжырымдарды қажет етеді. Сондықтан интегралданатын жүйелердің ішіндегі жоғарыда аталған сызықты емес есептерді шығару қазіргі өзекті мәселелердің бірі болып табылады.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

- 1 Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D. and Miura R.M. Method for solving the Korteweg-de Vries equation. // Phys. Rev Lett. American Physical Society. - 1967. - №19. - P. 1095-1097.
- 2 Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. // Phys. Rev. Lett. - 1965. - №15. - P. 240-243.
- 3 Russell J. Scott, Fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science // Report on waves.- London: John Murray, Albemarle Street, 1845. -52 p.
- 4 Bogdanov L.V., Veselov-Novikov equation as a natural two-dimensional generalization of the Korteweg-de Vries equation. // Theor. Math. Phys. - 1987. – Vol.70. - №2. - P. 219-223.
- 5 Konopelchenko B.G., Induced surfaces and their integrable dynamics. // Stud. Appl. Math. - 1996. – Vol. 96. - №1. - P. 9-51.
- 6 Taimanov I.A., Modified Novikov-Veselov equation and differential geometry of surfaces. // Amer. Math. Soc. Transl., Ser. - 1997. - Vol. 179. - №2. - P. 133-151.
- 7 Delong Yu, Q.P. Liu, Shikun Wang, Darboux transformation for the modified Veselov-Novikov equation. // J. of Physics. - 2001. –Vol. A35. - P. 3779-3785.
- 8 Taimanov I.A., The Moutard Transformation of Two-Dimensional Dirac Operators and Moëbius Geometry. // Math. Notes. - 2015. - Vol. 97. - №1. – P. 124–135.
- 9 Taimanov I.A., Two-dimensional Dirac operator and the theory of surfaces. //Russian Math.Surveys. - 2006. – Vol. 61. - №1, P. 79-159.
- 10 Taimanov I.A., Blowing up solutions of the modified Novikov-Veselov equation and minimal surfaces. // Theoret. and Math. Phys.- 2015. – Vol. 182. - №2. – P. 173-181.
- 11 Курманбаев Д.М., Построение разрушающих решений модифицированного уравнения Веселова-Новикова с помощью поверхности Эннепера второго порядка. // Вестник КазНУ(сер. мат., мех., инф.). - 2015. - т. 84 - №1. - С. 77-86.
- 12 Курманбаев Д.М., Солитонная деформация поверхности Эннепера второго порядка, Конференция "Геометрия многообразий". - Россия, Республика Бурятия г. Улан-Удэ, 27-30 июня 2016.- С. 26-29.
- 13 Норден А.П., Краткий курс дифференциальной геометрии // М.: Физматгиз, 2-е издание, 1958. – 244 с.
- 14 Kurmanbayev D., Exact Solution of Modified Veselov-Novikov Equation and Some Applications in the Game Theory. // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. - 2020. - Vol. 2020. - P. 1-7. - ID 9740638.

15 Курманбаев Д.М., Преобразование Мутара и поверхность Эннепера высшего порядка. // Международная научная конференция «Актуальные проблемы математики и информатики», посвященная 80-летию со дня рождения академика НАН РК Касымова К.К. - Алматы, Казахстан, 21 -23 декабря 2015. - С. 81-83.

16 Taimanov I.A., Tsarev S.P., On the Moutard transformation and its applications to spectral theory and Soliton equations. // Journal of Mathematical Sciences. - 2010. - Vol. 170. - №3. - P. 371-387.

17 Grinevich P.G., Novikov R.G., Moutard transform for the generalized analytic functions. // The Journal of Geometric Analysis. – 2016. - Vol. 26. - № 4. - P. 2984-2995. - doi:10.1007/s12220-015-9657-8.

18 Novikov R.G., Taimanov I.A., Moutard type transformation for matrix generalized analytic functions and gauge transformations. // Russian Mathematical Surveys. - 2016. - Vol. 71. - №5. - P. 970-972. - doi:10.1070/RM9741.

19 Novikov R.G., Taimanov I.A., Darboux–Moutard transformations and Poincaré–Steklov operators. // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. - 2018. - Vol. 302. - P. 315-324.

20 Wei-Qi Peng, Shou-Fu Tian and Tian-Tian Zhang, Dynamics of breather waves and higher-order rogue waves in a coupled nonlinear Schrödinger equation. // EPL (Europhysics Letters). - 2018. - Vol. 123. - №5. - P. 1-6.

21 Castro-Villarreal P., Guven J., Inverted catenoid as a fluid membrane with two points pulled together. // Physical Review. - 2007. - Vol.76. - №1. - 011922, P. 1-9.

22 Perel'man T.L., Fridman A.Kh. and EI'yashevich M. M., A modified Korteweg-de Vries equation in electrohydrodynamics. // Zh. Eksp. Teor. Fiz. - 1974. - Vol. 39. - №4. - P. 1316-1323.

23 Курманбаев Д.М., Разрушающие решения модифицированного уравнения Веселова Новикова и поверхность Эннепера третьего порядка, Международная научная конференция «Теория функций, информатика, дифференциальные уравнения и их приложения». // Тезисы докладов посвященная 80-летию академика НАН РК Н.К.Блиева. - Алматы, Казахстан, 15 -16 октября 2015. - С. 159-161.

24 Kurmanbayev D., Soliton deformations of some minimal surfaces. // Third International Conference on Analysis and Applied Mathematics. - Almaty, Kazakhstan, September 7-10, 2016. - P. 79.

25 Курманбаев Д.М., Солитонные деформаций инверсированных минимальных поверхностей. // VI научная конференция с международным участием «Геометрия многообразий и её приложения». - г. Улан-Удэ – оз. Байкал, 8-10 июля 2020. - С. 38-41.

- 26 Oprea John, Differential Geometry and its Applications. // The Mathematical Association of America: 2nd edition, 2007. - 487 p.
- 27 Новиков С.П., Тайманов И.А., Современные геометрические структуры и поля. // М.: МЦНМО, 2005. – 584 с.
- 28 Taimanov I.A., Lectures on Differential Geometry. //European Mathematical Society, 2008. - 219 p.
- 29 Spivak M., A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. // 5-Volumes, Publish or Perish: 3rd edition, 1999. - 467 p.
- 30 Weber M., Classical Minimal Surfaces in Euclidean Space by Examples //Claynotes, 2001. – 72 p.
- 31 Manakov S.V., The method of the inverse scattering problem and two dimensional evolution equations. // Uspekhi Mat. Nauk . - 1976. - Vol. 31. - P. 245-246.
- 32 Doliwa A., Grundland A. M., Minimal surfaces in the soliton surface approach. // Mathematical Physics. - 2015. - Vol.2. - P.1-12. doi.org/10.48550/arxiv.1511.02173.
- 33 Matveev V. B. and Salle M. A., Darboux Transformations and Solitons. // Berlin, Germany: Springer-Verlag. - 1991. – 120 p.
- 34 Kurmanbayev D., Yesmakhanova K., Soliton deformation of inverted catenoid. // News of the National Academy of sciences of the Republic of Kazakhstan. - 2021. - Vol. 2, №336. - P. 24-32. DOI:10.32014/2021.2518-1726.17.
- 35 Курманбаев Д.М., Солитонная деформация поверхности Эннепера третьего порядка.// Известия НАН РК, Серия физико-математическая. – 2016. - т.3, № 307. - С.163-167.
- 36 Александров В. А. Обобщённые функции: Учеб. пособие // Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2005. - 46 с.
- 37 Kaça D., Korteweg-de Vries Equation (KdV) and Modified Korteweg-de Vries Equations (mKdV), Semi-analytical Methods for Solving the. // Encyclopedia of Complexity and Systems Science, Springer, New York. – 2009. - Vol. 305. -№ A-C1. - P.5143-5161. - doi:10.1007/978-0-387-30440-3.
- 38 Tek S., Modified Korteweg-de Vries surfaces. // Journal of Mathematical Physics. - 2007. - Vol. 48. - №1. - P.1-24. - doi: 10.1063/1.2409523.
- 39 Sym A., Soliton Surfaces and Their Applications. // Lecture Notes in Physics. - Berlin: Springer, 1985. - Vol. 239. - 154 p.
- 40 Yesmakhanova K., Bekova G., Myrzakulov R., Darboux transformation and soliton solution for the (2+1)-dimensional complex modified Korteweg-de Vries equations. // Journal of Physics: Conference Series, 6th International Conference on Mathematical Modelling in Physical Sciences. - Paphos, Cyprus. - 2017.- P. 012045 (1-9).

- 41 Bonanno G., Game Theory // Davis, CA, USA: University of California, 2018. - 259 p.
- 42 Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения // 2-е изд., перераб., и доп. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. - 448 с.
- 43 Л. Курляндчик, Г. Розенблюм. Метод бесконечного спуска // Квант. - 1978. - № 1. - С. 24-27.
- 44 W. H. Bussey, Fermat's Method of Infinite Descent // The American Mathematical Monthly. - 1918. - Vol. 25. - №8. - P. 333-337.
- 45 M. Maksimović, L. Velimirović, M. Najdanović, Infinitesimal bending of DNA helices // Turkish journal of mathematics. - 2021. - Vol. 45. - P.520-528.
- 46 Dubrovin, B.A., and Novikov, S.P., Periodic and conditionally periodic analogs of the many-soliton solutions of the Korteweg-de Vries equation // Soviet Physics JETP. - 1974. - Vol. 40. - №6. - P.1058–1063.
- 47 Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии (3-е изд.) // М.-Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. - 428 с.
- 48 Фиников С.П. Теория поверхностей. Изд.стереотип. // М.: КомКнига, 2014. - 208 с.
- 49 Фиников С.П. Теория конгруэнций // М.-Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. - 528 с.
- 50 Румер Ю.Б. Спинорный анализ // М.-Л.: Объединенное научно-техническое издательство, 1936. - 105 с.
- 51 Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения // Харьков: ОНТИ, 1939. – 719 с.